S.06(43.36)M1ε

FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Discard at
A.M.N.H
1959

Sitzungsberichte

der

5,06(43:36)m 1₂

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1923

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

X
29-11374 Jan 14

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

		Seite
13. Jan.:	Finsterwalder, Frank, Lindemann	1*
3. Febr.:	Burmester, Liebmann, Lindemann, Tietze	2*
3. März:	Föppl	3*
5. Mai:	v. Groth, Döderlein, Liebmann und Kommerell	5*
2. Juni:	Martin, Willstätter	8*
7. Juli:	Hertwig, Faber, Lindemann, Voss	9*
3. Nov.:	Zenneck, Wien	10*
1. Dez.:	Stromer, v. Gruber	12*

II. Abhandlungen.

L. Döderlein, Anurognathus Ammoni, ein neuer Flugsaurier . 117

G. Faber, Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt 169

A. Föppl, Der Schubmesser. Ein neues Feinmeßgerät für Festigkeitsversuche 109

O. Frank, Die Leitung des Schalles im Ohr 11

R. Hertwig, Einfluß der Überreife der Geschlechtszellen auf das Geschlecht von Lymantria dispar. 215

H. Liebmann, Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven . 79

H. Liebmann und K. Kommerell, Über Biegungsflächen . . 165

F. Lindemann, Die nichteuklidischen Minimalflächen . . 1

F. Lindemann, Über konforme Abbildung von Kegelschnittpolygonen 95

F. Lindemann, Die Flächen mit gegebener Form des Linienelementes 195

E. Stromer, Ergebnisse der Bearbeitung mitteltertiärer Wirbeltier-Reste aus Deutsch-Südwest-Afrika 253

A. Voss, Über die isotherme Teilung 173

A. Voss, Zur Theorie der Raumkurven 183

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1923.

Sitzung am 13. Januar.

1. Herr S. Finsterwalder spricht

Über automorphe Anordnungen gleich großer, sich berührender Kreise.

Für die Ebene, die Kugel und die nichteuklidische Ebene werden solche Kreisanordnungen aufgestellt und ihre Abhängigkeit von einem Parameter untersucht. Die sphärischen und nichteuklidischen Anordnungen werden durch stereographische bzw. Riemannsche Abbildung in die Ebene dargestellt. Die dabei entstehenden Figuren umfassen neben allbekannten ornamentalen Mustern eine unerschöpfliche Fülle von neuen, sehr reizvollen, von welchen ausgezeichnete Beispiele gegeben werden.

2. Herr O. Frank trägt vor über:

Die Leitung des Schalles im Ohr.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr F. Lindemann legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung:

Die nichteuklidischen Minimalflächen.

Sitzung am 3. Februar.

1. Herr L. Burmester spricht über eine photogrammetrische Lösung der Aufgabe: Die Abstände der Rennpferde von dem nahen Ziel aus einer Momentphotographie zu ermitteln.

2. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Herrn H. Liebmann in Heidelberg:

Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven.

Die Gruppe der Kreisverwandtschaften in der Ebene und die konformen Gruppen der Räume dritter und höherer Dimension geben Anlaß zu einer Invariantentheorie, die ein Gegenstück zur Affingeometrie ist. Es werden die Invarianten für Kurven behandelt, wobei auch wichtige Beziehungen für Schmiegungskugeln auftreten.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr F. Lindemann spricht

Über konforme Abbildung von Kegelschnittpolygonen.

Es wird gezeigt, daß die von anderer Seite gegen die vom Verfasser aufgestellte allgemeine Theorie dieser Abbildungsaufgaben erhobenen Einwände nicht stichhaltig sind, ferner wie man aus den allgemeinen Formeln die Schwarz'schen Resultate für Kreisbogenpolygone wieder findet.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr von Dyck legt vor eine Abhandlung:

Über die Gauß-Green-Stokes'schen Integralsätze von Herrn H. Tietze in Erlangen.

Es handelt sich um Kurvenintegrale, wo die in ihnen auftretenden Funktionen (Vektorkomponenten) nicht Ortsfunktionen, sondern von der Kurve selbst abhängig sind. Ist L die Randlinie $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ eines ebenen Bereiches S

(vom Inhalt ΔS), so mögen die $X_i(t)$ längs L mittelst 8 Funktionen $c^i_{k\sigma}(x_1, x_2)$ durch die Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dX_i}{dt} = \sum_{k,\sigma=1}^{2} c^i_{k\sigma}(x_1(t), x_2(t))\, X_k \frac{dx_\sigma}{dt}$$

und die Anfangswerte $X_i(t_0) = A_0$ im Punkt P_0 $(t = t_0)$ bestimmt werden. Entsprechend (1) werde symbolisch $\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_\sigma}\right) = \sum_k c^i_{k\sigma} X_k$ gesetzt. Für hinlänglich wenig ausgedehntes S unterscheidet sich $\int_{(L)} (X_1(t)\, x_2'(t) - X_2(t)\, x_1'(t))\, dt$ (versehen mit dem Umlaufssinn entsprechenden Vorzeichen) nur um eine Größe höherer (dritter) Ordnung von $\Delta S \cdot \left[\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)\right]_{t=t_0}$.

Wegen genauer Fassung und Voraussetzungen, wegen allgemeiner bestimmter $X_i(t)$, wegen zweidimensionaler Bereiche im R_n sei auf die an anderer Stelle erscheinende Arbeit verwiesen, wegen Anwendung auf die Herleitung des Riemann-Christoffel'schen Tensors auf einen Aufsatz „über die Parallelverschiebung in Riemann'schen Räumen" (Math. Zeitschr.).

Sitzung am 3. März.

Herr Föppl legt eine Abhandlung vor:

Der Schubmesser, ein neues Feinmeßgerät für Festigkeitsversuche.

Das Instrument wurde in der Werkstätte des mechanisch-technischen Laboratoriums der Technischen Hochschule gebaut. Es ist dazu bestimmt, die kleine Änderung zu messen, die ein ursprünglich rechter Winkel bei der durch eine Belastung hervorgerufenen elastischen Formänderung eines Körpers erfährt.

Die Hauptbestandteile sind zwei Stängelchen von ungefähr 10 cm Länge, von denen das eine einen kurzen Querarm

hat, an dem sich die zur Lagerung an dem Probekörper bestimmten Spitzen befinden. Das andere Stängelchen trägt ebenfalls zwei Spitzen, deren Verbindungslinie in die Längsrichtung des Stängelchens fällt. Die vier Spitzen bilden ein Quadrat miteinander, dessen Diagonalen 1 cm lang sind. Beide Stängelchen sind um den Mittelpunkt dieses Quadrats drehbar gegeneinander gelagert. Das Instrument wird mit einem Bügel, der je nach Bedarf ausgewechselt werden kann, an dem Probekörper festgeklemmt.

Zu Anfang eines Versuches gehen beide Stängelchen ungefähr in der gleichen Richtung; während des Versuches drehen sie sich aber gegeneinander um den kleinen Winkel, der gemessen werden soll. Zur Winkelmessung dienen kleine Spiegel, die an den Enden beider Stängelchen ähnlich wie beim Drehungsmesser von Martens stelzenförmig gegen die Stangenenden gelagert sind. Die Einrichtung ist so getroffen, daß sich beide Spiegel im entgegengesetzten Sinne drehen, womit der Fehler ausgeschaltet wird, der sonst wegen Drehungen des ganzen Instruments oder des Probekörpers, an dem es befestigt ist, zu erwarten wäre.

Die Hauptanwendung des Instruments besteht vorläufig darin, die Winkeländerungen und hiermit die Schubspannungen zu messen, die in einem auf Verdrehen beanspruchten Stabe von größerem Querschnitt an verschiedenen Stellen des Querschnitts hervorgerufen werden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 5. Mai.

1. Herr P. v. Groth berichtet über seine Studien zur Geschichte der Kristallkunde. Der erste Versuch der Erklärung der Mannigfaltigkeit der an einer Kristallart beobachteten Formen und deren Zurückführung auf eine einfache Grundform ist in einer Abhandlung des schwedischen Chemikers Bergman vom Jahre 1773 enthalten. Die gleichen Ansichten adoptierte 1782 der französische Forscher Abbé Haury und arbeitete sie zu einer „Theorie der Kristallstruktur" aus, welche als besonderes Werk 1783 erschien und seitdem allgemein als die wissenschaftliche Kristallographie begründend angesehen wird. Dieselbe enthält aber, wie durch Modelle in dem Vortrage erläutert wurde, so zahlreiche Irrtümer und zum Teil Haury selbst nicht entgangene Widersprüche, daß er in der Folge in zahlreichen Veröffentlichungen gezwungen war, sie durch weitere Annahmen zu stützen, welche jedoch völlig willkürliche sind und jeder Beweiskraft entbehren. Ebenso willkürlich und später als unrichtig nachgewiesen ist auch seine Hypothese, daß nicht nur die Zahlen, durch welche die mannigfachen Formen einer Kristallart auf die Grundform zurückgeführt werden können, in einfachem rationalen Verhältnis stehen, sondern auch diejenigen, welche die Grundform selbst bestimmen. Die letzteren sind vielmehr, wie die 1823 erfolgte Entdeckung der Veränderlichkeit der Kristallwinkel mit der Temperatur durch Mitscherlich gezeigt hat, Größen, deren Verhältnisse sich im allgemeinen bei der Anderung des Wärmeinhalts des Kristalls stetig um unendlich kleine Beträge ändern. Die bisher allgemeine Annahme, daß Haury der Entdecker des sogenannten Rationalitätsgesetzes, d. i. des Grundgesetzes der geometrischen Kristallographie, sei, beruht daher auf einem Irrtum; dieses Gesetz ist vielmehr erst im Anfange des 19. Jahr-

hunderts durch deutsche Forschung, besonders durch diejenige des Berliner Mineralogen Weiß und seiner Schüler, in richtiger Form festgestellt worden.

2. Herr L. Döderlein berichtet

Über eine neue Form von Flugsauriern aus dem oberen Jura von Eichstädt in Mittelfranken,

der er den Namen Anurognathus Ammoni gibt. Die auf einer Platte von lithographischem Schiefer liegenden Reste geben die Möglichkeit, das Skelett des merkwürdigen Tieres fast vollständig zu rekonstruieren. Es hat etwa die Größe einer Amsel. Obwohl der Schwanz dieses Flugsauriers fast ganz verkümmert ist und nur noch aus einem kurzen Stummel besteht, gehört er merkwürdigerweise gerade zur Gruppe der Rhamphorhynchoidea, deren sämtliche bisher bekannten Vertreter im Besitz eines sehr langen Schwanzes sind. Und gerade die Merkmale sind bei der neuen Form besonders auffallend ausgebildet, durch die sich die Rhamphorhynchoidea gegenüber den Pterodactyloidea auszeichnen, zu welcher Gruppe die sämtlichen bisher bekannten schwanzlosen Flugsaurier gehören. So besitzt Anurognathus den kürzesten Metakarpus und die längste fünfte Hinterzehe unter allen Flugsauriern. Sehr eigentümlich ist auch bei ihm die kurze Schnauze, die dem riesigen Kopf etwas Katzenartiges gibt. Obwohl die äußeren Teile der Flugfinger nicht erhalten sind, ließ sich doch mit einiger Wahrscheinlichkeit die Länge der Flügel berechnen, und es ergab sich, daß die neue Form an relativer Flügellänge nicht nur von keinem anderen Flugsaurier übertroffen wird, sondern den mit den längsten Flügeln ausgestatteten Vögeln, wie den Seeschwalben und Nachtschwalben, darin etwa gleichkommt. Dazu kommt noch, daß seine Hinterfüße, deren Zehen durch eine Art von Schwimmhaut verbunden waren, wahrscheinlich als Steuer dienten, das sowohl als Vertikal- wie als Horizontalsteuer äußerst wirksam gewesen sein muß; ein langer Schwanz wäre dabei nur hinderlich gewesen. Anurognathus muß ein Flug-

künstler ersten Ranges gewesen sein, und was die Leistungsfähigkeit seiner Flug- und Steuerorgane betrifft, dürfte er seinesgleichen kaum finden unter den bisher bekannten Wirbeltieren. Interessant ist, daß das Fossil auch noch die deutlichen Spuren von Weichteilen erkennen läßt, besonders von der Flughaut und von einem hahnenkammartigen Aufsatze auf dem Kopfe. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Das korresp. Mitglied Herr v. Brill in Tübingen übersendet eine Abhandlung der Herren Liebmann und Kommerell

„Zur Abhandlung des Herrn F. Lindemann über Biegungsflächen“

für die Sitzungsberichte.

Sitzung am 2. Juni.

1. Herr R. Martin macht Mitteilung über einige Ergebnisse einer somatometrischen Untersuchung an Münchner Volksschulkindern, die in den Jahren 1921 und 1922 durchgeführt wurde. Er behandelt Körpergröße und Körpergewicht und zeigt durch Vergleiche mit den Menschen der Vorkriegszeit und mit solchen amerikanischer Kinder, wie sehr der allgemeine Körperzustand unserer Münchner Kinder zurückgegangen ist. (Erscheint anderwärts.)

2. Herr R. Willstätter trägt eine in Gemeinschaft mit F. Seitz ausgeführte Untersuchung Über die Hydrierung des Naphthalins vor, die namentlich den Einfluß des Sauerstoffs auf die Übertragung von Wasserstoff behandelt. Bei der katalytischen Reduktion mit Platin vermag der Sauerstoff außer auf die Reaktionsgeschwindigkeit auch auf den Reaktionsweg einen bestimmenden Einfluß auszuüben. Beim Fehlen von Sauerstoff läßt sich mit Hilfe der Platinmetalle kein Wasserstoff übertragen. Bei niedrigen Sauerstoffgehalten greift die Hydrierung beide Kerne des Naphthalins zugleich an und führt ohne faßbare Zwischenglieder zum Dekahydronaphthalin; bei höheren Sauerstoffgehalten, sei es im Platinmohr oder im Wasserstoffgase, wird das Naphthalin in einem einzigen Kerne, also unter Bildung der Tetrahydroverbindung, reduziert. Aus diesen Beobachtungen ergeben sich Folgerungen für die Konstitution des Kohlenwasserstoffs und seiner Additionsprodukte sowie hinsichtlich der Wirkungsweise des Katalysators.

Sitzung am 7. Juli.

1. Herr R. Hertwig spricht über den Einfluß, welchen die Überreife der Geschlechtszellen auf das Geschlecht bei Schmetterlingen ausübt. Während bei Fröschen hochgradige Überreife der Eier Ursache ist, daß sich ausschließlich männliche Tiere entwickeln, konnte ein solcher Einfluß bei Schmetterlingen nicht nachgewiesen werden. Bei den verschiedensten Graden von Überreife der Eier ergab sich im großen und ganzen das normale Geschlechtsverhältnis 50 : 50. Das gleiche Resultat lieferte Überreife der männlichen Geschlechtszellen. Das verschiedene Verhalten der beiden Tierarten sucht der Vortragende daraus zu erklären, daß das Wirksame bei Fröschen nicht die ovariale, sondern die uterine Überreife ist, während bei Schmetterlingen die Bedingungen für letztere nicht gegeben sind.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Faber beweist, daß eine homogene kreisförmige Membran einen tieferen Grundton gibt als eine andere von gleicher Fläche und Spannung.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr F. Lindemann spricht:

Über die Biegung der Flächen, Bestimmung aller Flächen mit gegebenem Linienelement.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr A. Voss trägt vor:

1. Über die isotherme Teilung.
2. Zur Theorie der Raumkurven.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 3. November.

1. Herr Zenneck spricht:

1. Über das Dämmerungssehen mit Ferngläsern und diskutiert die verschiedenen physiologischen und physikalischen Gründe, weshalb man mit einem Fernglas bei Dunkelheit auch flächenhafte Objekte deutlicher sieht, als mit bloßem Auge, obwohl die Helligkeit solcher Objekte mit einem Glas unter keinen Umständen gesteigert werden kann, sondern notwendigerweise durch Absorption und Reflexion verringert werden muß.

2. Über die Resonanzkurven von einfachen Schwingungskreisen mit Eisenkernspulen und von zwei Schwingungskreisen, die durch eine Eisenkernspule miteinander gekoppelt sind. Im letzteren Falle ergibt sich die auffallende Erscheinung, daß der Verlauf der Resonanzkurven an der Stelle des einen Maximums den Charakter der Resonanzkurve eines Schwingungskreises mit Eisenkernspule, im anderen Maximum den Charakter der Resonanzkurve eines Schwingungskreises ohne Eisenkernspule besitzt.

2. Herr W. Wien trägt vor:

Über weitere Messungen der Leuchtdauer der Atome.

Bekanntlich ist es bisher nicht gelungen, die Wellentheorie des Lichts, die seit einem Jahrhundert die Grundlage der Optik bildet, mit der der neuen Quantentheorie in Einklang zu bringen. Die letztere hat eine sehr umfassende Systematik der Spektrallinien ermöglicht, vermag aber an den Vorgängen, die bei der Entstehung des Lichts selbst auftreten, keine Rechenschaft zu geben. Andererseits ist es sicher, daß die alte klas-

sische Wellentheorie ebenfalls hierzu nicht ausreicht. Es erscheint daher von besonderer Wichtigkeit, über diese ungeklärten Fragen Versuche anzustellen. Ein solcher ist die Messung der Dauer des Leuchtens der einzelnen zur Lichtaussendung angeregten Atome. Atome, die als positiv geladene Strahlen (Kanalstrahlen) in einen Raum von hoher Luftverdünnung gehen, hören allmählich mit der Aussendung von Licht auf und durch photographische Aufnahme des Strahls kann man messen, wie schnell die Aussendung des Lichts abnimmt. Es hat sich nun gezeigt, daß bei dem Licht sehr vieler Gruppen von Spektrallinien diese Leuchtdauer gleich groß ist, so bei den Linien der Balmerserie des Wasserstoffs, bei den Funkenlinien des Sauerstoffs, für die erste Nebenserie des Heliums, für die Hauptserie und zweite Nebenserie des Quecksilbers. Es hat sich aber auch eine andere Leuchtdauer ergeben, nämlich bei der der im Ultravioletten liegenden Resonanzlinie des Quecksilbers. Hier ist die Leuchtdauer etwa fünfmal so groß.

Sitzung am 1. Dezember.

1. Herr E. Stromer trägt vor:

Ergebnisse der Bearbeitung mitteltertiärer Wirbeltierreste aus Deutsch-Südwest-Afrika.

Die Fossilien, welche von den Herren Prof. Kaiser und Diplomingenieur Dr. Beetz in den Diamantfeldern südlich von Lüderitzbucht an 3 Stellen gesammelt und der hiesigen paläontologischen Staatssammlung geschenkt wurden, erwiesen sich in der nun abgeschlossenen Bearbeitung als ungefähr gleichalterig und untermiocän. Außer vorwiegenden Resten großer Landschildkröten und eines Frosches sind es solche von Urraubtieren, Nashorn, Schweinen, Antilopen, Klippschliefern, klippschlieferähnlichen Formen und vor allem von Nagetieren. Es lebten also mannigfaltige Säugetiere einer einstigen Steppenfauna in der jetzt fast wasserlosen Wüste. Fast alle bestimmbaren Arten und Gattungen sind neu und größtenteils charakteristisch für das äthiopische Reich der Tiergeographen. Dieses bestand demnach schon zur Mitteltertiärzeit, sicher getrennt von dem madagassischen und südamerikanischen Reiche, aber im Norden mit Beziehungen zu dem Europa und Asien umfassenden paläarktischen Reiche. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Max von Gruber berichtet über Versuche, welche der Assistent an der Kinderklinik, Dr. Ullrich, im hiesigen Hygienischen Institute über den Grundumsatz der Säuglinge mit Hilfe des Pettenkofer-Voitschen Respirationsapparates angestellt hat. Es ergab sich in Übereinstimmung mit früheren amerikanischen Angaben, daß der Grundumsatz, bezogen auf 1 cm Körperlänge, bei Neugeborenen weniger als ein Drittel desjenigen der Erwachsenen beträgt. Er steigt im Laufe des ersten Lebensjahres rasch an und erreicht schon am Ende desselben die volle Höhe.

Die nichteuklidischen Minimalflächen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 13. Januar 1923.

Die nichteuklidischen Minimalflächen kann man nach Darboux dadurch definieren, daß ihre Minimalkurven ein konjugiertes System sind, d. h. daß die Haupttangenten-Kurven ein Orthogonalsystem im nichteuklidischen Sinn bilden.[1]) Die Flächen haben dann auch die den euklidischen Minimalflächen analoge Minimumeigenschaft.

Darboux hat eine Transformation angegeben,[2]) welche den nichteuklidischen Raum auf das Innere einer Kugel abbildet, und nach Poincaré ist diese Transformation besonders anschaulich, wenn man das Innere der Kugel weiter auf den Halbraum abbildet (etwa den Halbraum oberhalb der Ebene $z = 0$); dabei gehen die nichteuklidischen Minimalkurven in die euklidischen Minimalkurven über. Man kann nach den von mir abgeleiteten älteren Bourschen Formeln[3]) jede Fläche durch ihre Minimalkurven (mit den Parametern α, β) darstellen; vermöge der Poincaréschen Transformation erhält man also auch die Darstellung einer Fläche im nichteuklidischen Raume durch die nichteuklidischen Minimalkurven; diese Darstellung bildet die Grundlage der folgenden Betrachtung.

---

[1]) Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, 1894, S. 471 ff.

[2]) Annales de l'école normale 1864; Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces 1873, S. 123; Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 3, 1894, S. 493.

[3]) Abhandlungen der Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. 29, 1921. Auf einige Punkte dieser Arbeit komme ich demnächst zurück.

1. Die erwähnten Bour'schen Formeln geben für die Koordinaten x, y, z einer Fläche:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= i\int[\cos\lambda\cdot W_\alpha\,d\alpha - \cos\mu\cdot W_\beta\,d\beta],\\ y &= i\int[\sin\lambda\cdot W_\alpha\,d\alpha - \sin\mu\cdot W_\beta\,d\beta,\\ z &= \int[W_\alpha\,d\alpha + W_\beta\,d\beta] = W, \end{aligned}$$

wo λ zu μ, α zu β konjugiert ist und W eine reelle Funktion von α, β bezeichnet. Zwischen λ, μ und W bestehen die folgenden Gleichungen:

$$(2)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = -\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha},$$

wo $\omega = \lambda - \mu$; also auch:

$$(3)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = -\frac{\partial\omega}{\partial\beta} + \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha},$$

und als Folge von (2) und (3):

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Die Fundamentalgrößen E, F, G der Fläche (1) sind:

$$(5)\qquad E = 0,\quad F = 2\cos^2\frac{\omega}{2}\cdot W_\alpha W_\beta,\quad G = 0$$

und das Krümmungsmaß:

$$(6)\qquad K = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2\lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -\frac{\lambda_\alpha\mu_\beta - \lambda_\beta\mu_\alpha}{2F\cdot\cos^2\dfrac{\omega}{2}}.$$

2. Die vorhin erwähnte Darboux-Poincaré'sche Transformation habe ich in meinen Anmerkungen zu der Deutschen Übersetzung von Poincaré's „Wissenschaft und Hypothese" vollständig entwickelt. Sind x, y, z Koordinaten im euklidischen und ξ, η, ζ Koordinaten im nichteuklidischen Raume, und ist in letzterem

$$(7)\qquad (k\zeta + 1)^2 - \xi^2 - \eta^2 - 1 = 0$$

die Gleichung der unendlich fernen Fundamentalfläche, so hat man zu setzen:

$$(8)\qquad \xi = \frac{2kx}{r^2 - k^2},\quad \eta = \frac{2ky}{r^2 - k^2},\quad \zeta = \frac{2k}{r^2 - k^2},\quad \text{wo } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Führt man homogene Koordinaten ξ, η, ζ, τ ein, deren absolute Werte durch die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \tau^2 - (k\zeta + \tau)^2 = -1 \tag{9}$$

festgelegt werden, so findet man für das Bogenelement $d\sigma$:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\tau^2 - (k\,d\zeta + d\tau)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}, \tag{10}$$

woraus sich ergibt, daß Minimalkurven ($d\sigma = 0$) in Minimalkurven ($ds = 0$) übergehen. Setzt man in die Gleichung (8) für x, y, z die Werte (1) ein, so hat man die Darstellung einer beliebigen Fläche im nichteuklidischen Raum durch ihre Minimalkurven.

3. Sollen die Minimalkurven ein konjugiertes System bilden, so muß bekanntlich die Determinante $\sum \pm \xi \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \alpha \partial \beta}$ verschwinden, wenn man hierin setzt:

$$\varrho\,\xi = 2kx, \quad \varrho\,\eta = 2ky, \quad \varrho\,\zeta = 2k, \quad \varrho\,\tau = r^2 - k^2,$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Berechnet man aus (1) die Elemente der Determinante, so ergibt sich das einfache Resultat:

$$W_\alpha W_\beta [F \cdot \sin(\lambda - \mu) + W W_\alpha \lambda_\beta (1 + \cos(\lambda - \mu))] = 0;$$

die scheinbare Unsymmetrie der linken Seite entsteht daraus, daß nach (1) die Werte

$$\begin{aligned} x_{\alpha\beta} &= -i \sin\lambda \cdot W_\alpha \cdot \lambda_\beta + i \cos\lambda \cdot W_{\alpha\beta} \\ &= i \sin\mu \cdot W_\beta \mu_\alpha - i \cos\mu \cdot W_{\alpha\beta}, \\ y_{\alpha\beta} &= i \cos\lambda \cdot W_\alpha \cdot \lambda_\beta - i \sin\lambda \cdot W_{\alpha\beta} \\ &= -i \cos\mu \cdot W_\beta \mu_\alpha + i \sin\mu \cdot W_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

in doppelter Form darstellbar sind, von der nur eine Form benutzt wurde; es ist ferner zu beachten, daß an Stelle von $z_{\alpha\beta}$ nach elementarer Umformung der Determinante der Wert $F + z z_{\alpha\beta}$ tritt. Die Unsymmetrie verschwindet, wenn man den Wert λ_β aus (2) einsetzt; es wird:

$$F = -W \cdot W_{\alpha\beta} \cdot \left(\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}\right)^2,$$

und infolge von (5)

$$W \cdot W_{\alpha\beta} + 2\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 W_\alpha W_\beta = 0. \tag{11}$$

Dies ist die Bedingung dafür, daß die Formeln (8) zusammen mit (7) eine nichteuklidische Minimalfläche darstellen, wobei α, β die Parameter der Minimalkurven sind.

4. Die Größen W, ω müssen den beiden Gleichungen (4) und (11) genügen. Mit Hilfe der Gleichungen (2) können wir W eliminieren. Es wird zunächst:

$$\frac{W_\beta}{W}\sin\omega + \lambda_\beta = 0, \quad \frac{W_\alpha}{W}\sin\omega - \mu_\alpha = 0, \tag{12}$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\lambda_\beta}{\sin\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\mu_\alpha}{\sin\omega}\right) = 0 \tag{13}$$

oder:

$$(\lambda_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta})\sin\omega - \operatorname{cosin}\omega\,(\lambda_\beta\omega_\alpha + \mu_\alpha\omega_\beta) = 0. \tag{14}$$

Dies ist die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen (12); und da diese auseinander entstehen, indem man: mit $-i$ vertauscht, W aber ungeändert läßt, auch die Bedingung dafür, daß die gemeinsame Lösung W der Gleichungen (12) eine reelle Funktion von α, β ist.

Es ist aber der Ableitung nach die Gleichung (14) auch die Bedingung für das Zusammenbestehen der Gleichungen (2) mit der Gleichung (11) und folglich auch für das Zusammenbestehen der Gleichung (4), die aus (2) folgte, mit der Gleichung (11); in der Tat ist die zweite Gleichung eine Folge der ersten, wenn W reell ist, und somit auch die aus beiden folgende Gleichung (4) erfüllt. Sobald die Gleichung (14) erfüllt ist, ergibt sich in der Tat aus (12) derselbe Wert von W, wie aus (2). Aus (12) folgt nämlich durch Differentiation:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}\sin\omega + W_\beta\omega_\alpha\operatorname{cosin}\omega + W_\alpha\lambda_\beta + W\lambda_{\alpha\beta} &= 0 \\ -W_{\alpha\beta}\sin\omega - W_\alpha\omega_\beta\operatorname{cosin}\omega + W_\beta\mu_\alpha + W\mu_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

und durch Addition wegen (14):

$$\sin\omega\,(W_\beta\omega_\alpha - W_\alpha\omega_\beta) + W(\lambda_\beta\omega_\alpha + \mu_\alpha\omega_\beta) = 0$$

oder wegen (2)

$$(W_\beta \omega_\alpha - W_\alpha \omega_\beta)\left[\sin\omega \cdot W_\alpha W_\beta + W W_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right] = 0$$

oder, da die erste Klammer im allgemeinen nicht Null ist:

$$W \cdot W_{\alpha\beta} + 2\, W_\alpha W_\beta \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 = 0;$$

das aber ist die für eine nichteuklidische Minimalfläche charakteristische Gleichung (11), welche eben aussagt, daß λ_β aus (2) und aus (12) berechnet, je den gleichen Wert ergibt:

$$\lambda_\beta = \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} \cdot \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} = -\frac{W_\beta}{W}\sin\omega.$$

5. Zur Lösung der Gleichung (14) setzen wir $\lambda = p + iq$, $\mu = p - iq$; dann ergibt sich (da $\omega = \lambda - \mu = 2iq$):

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta}\operatorname{tang}(2iq) - i\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\frac{\partial q}{\partial\alpha} + \frac{\partial p}{\partial\alpha}\frac{\partial q}{\partial\beta}\right) = 0,$$

eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für q, wenn p als reelle Funktion von α, β beliebig angenommen wird; die Integration verlangt die Lösung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(16) \qquad \frac{d\alpha}{p_\beta} = \frac{d\beta}{p_\alpha} = \frac{i\,dq}{p_{\alpha\beta}\cdot\operatorname{tang}(2iq)}.$$

Sind λ und μ gefunden, so ergibt sich W aus (12) durch Quadratur.

Die Aufstellung aller Minimalflächen im nichteuklidischen Raum ist hiermit auf die Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (15), bzw. des Systems totaler Gleichungen (16) zurückgeführt.

6. Nach Darboux verlangt dies Problem die Lösung der beiden partiellen Gleichungen zweiter Ordnung[1])

$$(17) \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = C\cdot\Theta \text{ und } \frac{\partial^2 \log C}{\partial\alpha\,\partial\beta} = C - \frac{1}{C}.$$

---

[1]) Loc. cit. S. 476. Einen besonderen Fall hat Schübel behandelt: Aufstellung von nichteuklidischen Minimalflächen. Inauguraldissertation, München 1906.

Macht man $\log C = 2i\gamma$, so geht letztere Gleichung in die bekannte Form

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha \partial \beta} = \sin(2\gamma)$$

über, von der die Darstellung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes abhängt.[1]) Man hat zunächst aus ihr C zu bestimmen und dann solche Lösungen X, Y, Z, T der ersten Gleichung (17) zu suchen, die der Bedingung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1 \tag{18}$$

genügen; dann sind X, Y, Z, T die Koordinaten der Punkte einer nichteuklidischen Minimalfläche. Um diese Veränderlichen mit den unsrigen in Beziehung zu bringen, haben wir zu setzen:

$$X = i\xi, \quad Y = i\eta, \quad Z = i\tau, \quad T = k\zeta + \tau, \tag{19}$$

wodurch die Bedingung (18) in (9) übergeführt wird. Die Größe C ist bei Darboux ursprünglich durch die Gleichung

$$\begin{aligned} -C &= X_\alpha X_\beta + Y_\alpha Y_\beta + Z_\alpha Z_\beta + T_\alpha T_\beta \\ &= -\xi_\alpha \xi_\beta - \eta_\alpha \eta_\beta - \zeta_\alpha \zeta_\beta - (k\zeta_\alpha + \tau_\alpha)(k\zeta_\beta + \tau_\beta) \end{aligned} \tag{20}$$

definiert. Die Lösung der zweiten Gleichung (17) geschieht also, indem man in den Ausdrücken (1) für x, y, z zuerst λ und μ durch die partielle Gleichung (15) bestimmt, sodann W aus den Gleichungen (12) berechnet und die so aus (1) gewonnenen Werte von x, y, z in (8) einsetzt; hieraus berechnet sich endlich C mittels der Gleichung (20), und die Ausdrücke (19) sind Lösungen der ersten Gleichung (17).

7. Bei der Transformation (8) entsprechen den geraden Linien des nichteuklidischen Raumes Kreise im euklidischen Halbraume ($z > 0$), deren Mittelpunkt in der Ebene $z = 0$ liegen, und deren Ebenen der Z-Axe parallel sind. Den Haupttangenten einer Fläche im Raume (ξ, η, ζ) entsprechen also im Raume (x, y, z) Kreise der bezeichneten Art, welche die entsprechende Fläche von der zweiten Ordnung berühren; und es gibt für jede Fläche zwei solche Systeme von Kreisen; die Tangenten derselben im Berüh-

[1]) Über deren Integration nach anderer Methode vgl. meinen Aufsatz im Jahrgang 1922 dieser Sitzungsberichte über die partielle Gleichung $s = \sin z$.

rungspunkte bilden auf der Fläche zwei Systeme von Kurven, die den Haupttangentenkurven der Fläche im Raum (ξ, η, ζ) entsprechen. Da letztere Kurven auf den nichteuklidischen Minimalflächen ein Orthogonalsystem bilden, so entspricht einer solchen Minimalfläche im Halbraum eine Fläche, auf welcher die soeben bezeichneten (von zur Ebene $z = 0$ orthogonalen Kreisen umhüllten) Kurven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden; denn bei der Abbildung (8) gehen nichteuklidische Winkel in gleiche euklidische Winkel über.

Diese Bildflächen kann man in folgender Weise durch eine partielle Differentialgleichung direkt charakterisieren.

8. Es werde z als Funktion von x und y gedacht, so daß in üblicher Weise

$$(21) \quad dz = p\,dx + q\,dy, \quad d^2z = r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2$$

gesetzt wird. Wir legen durch den Punkt x, y, z einen ebenen Schnitt, dessen Ebene senkrecht zur Ebene $z = 0$ steht, und berechnen zunächst den Krümmungsradius R dieses Schnittes; es ist bekanntlich

$$R = \cos\vartheta \cdot \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\cdot\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r(dx)^2 + 2s\,dx\,dy + t(dy)^2},$$

wobei ϑ den Winkel bedeutet, den die Normale des ebenen Schnittes mit der Flächennormale bildet, also

$$\cos\vartheta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu,$$

wenn λ, μ, ν die Richtungswinkel der Flächennormale und α, β, γ diejenigen der Normale des ebenen Schnittes bezeichnen; es ist hier

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Die Normale mit den Richtungswinkeln α, β, γ werde durch die Gleichungen

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\cos\beta} = \frac{Z - z}{\cos\gamma}$$

dargestellt; die Richtungs-Cosinus genügen den beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot dx + \cos\beta \cdot dy + \cos\gamma \cdot dz &= 0, \\ \cos^2\alpha \quad + \cos^2\beta \quad + \cos^2\gamma \quad &= 1; \end{aligned}$$

jene Linie soll in einer zur Ebene $z = 0$ senkrechten Ebene

$$(X - x)\,dy - (Y - y)\,dx = 0$$

liegen; folglich kann man

$$\operatorname{cosin}\alpha = \varrho \cdot dx, \quad \cos\beta = \varrho \cdot dy$$

setzen; dann folgt

$$\varrho\,(dx^2 + dy^2) + \cos\gamma \cdot dz = 0, \quad \varrho^2 (dx^2 + dy^2) + \cos^2\gamma = 1,$$

und hieraus

$$\varrho = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\gamma = -\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{dx\,dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{dy\,dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

also schließlich

$$\begin{aligned} \operatorname{cosin}\vartheta &= -\frac{p\,dx\,dz + q\,dy\,dz + dx^2 + dy^2}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}\,\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \end{aligned}$$

und der Krümmungsradius wird

$$(22) \qquad R = \frac{-(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{3/2}}{(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2)\,\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt x_0, y_0, z_0 hat die Koordinaten

$$x_0 = x + R\cos\alpha, \quad y_0 + R\cos\beta, \quad z_0 = z + R\cos\gamma.$$

Soll derselbe (damit der Kreis die Ebene $z = 0$ orthogonal schneidet) in der Ebene $z = 0$ liegen, so folgt

$$z + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2} = 0, \qquad \text{oder:}$$

$$(zr + 1 + p^2)\,dx^2 + 2(zs + pq)\,dx\,dy + (zt + 1 + q^2)\,dy^2 = 0. \tag{23}$$

Diese Differentialgleichung bestimmt auf der gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ ein System von Kurven, die von den zur Ebene $z = 0$ senkrechten oskulierenden Kreisen umhüllt werden, deren es in jedem Punkte der Fläche (zueinander orthogonal) zwei gibt.

Für die Bildflächen der nichteuklidischen Minimalflächen verlangen wir, daß die durch einen Punkt x, y gehenden Kurven sich dort orthogonal schneiden, daß also die Bedingung

$$dx\,d'x + dy\,d'y + dz\,d'z = 0$$

oder wegen der ersten Gleichung (21) die Bedingung

$$(1 + p^2)\,dx\,d'x + pq\,(dx\,d'y + dy\,d'x) + (1 + q^2)\,dy\,d'y = 0 \tag{24}$$

erfüllt sei, wobei mit $dy : dx$ und $d'y : d'x$ die beiden durch die quadratische Gleichung (23) bestimmten Richtungen bezeichnet sind. Nun ist

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d'y}{d'x} = -2\,\frac{zs + pq}{zt + 1 + q^2}, \quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d'y}{d'x} = \frac{zr + 1 + p^2}{zt + 1 + q^2}.$$

Folglich erhalten wir aus (24)

$$(zr + 1 + p^2)(1 + q^2) - 2(zs + pq)pq + (zt + 1 + q^2)(1 + p^2) = 0$$

oder:

$$z[r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2)] + 2(1 + p^2 + q^2) = 0. \tag{28}$$

Durch diese partielle Differentialgleichung sind unsere euklidischen Bildflächen der nichteuklidischen Minimalflächen charakterisiert.

Die Integration derselben ist durch die vorstehenden Entwicklungen auf die Integration der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (15), die eine willkürliche Funktion enthält, zurückgeführt.

Die Leitung des Schalles im Ohr.

Von **Otto Frank.**

Vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1923.[1])

Vor einigen Jahren habe ich in den Berichten der Akademie[2]) den Inhalt einer Untersuchung veröffentlicht, nach der eine Reihe von physiologischen Problemen mit dem Prinzip der gekoppelten Schwingungen aussichtsreich angegriffen werden kann. Ich habe damals darauf aufmerksam gemacht, daß hierzu auch die Mechanik der Schalleitung im Ohr gehört. Mir war es klar, daß hier ebenso vorgegangen werden sollte, wie bei der Behandlung der Registrierinstrumente, deren Theorie, wie ich glaube, jetzt abgeschlossen ist. Man wird sich die Frage vorlegen: Wie kann ein Apparat beschaffen sein, wenn er die Schalleitung im Ohr übernehmen soll und wie entsprechen die tatsächlichen Verhältnisse des Ohrs der Aufgabe, die ein solcher Apparat zu erfüllen hat. Man hat zunächst die Grundidee des schalleitenden Apparates festzulegen. Dann ist die mathematisch-mechanische Analyse von einfachen Modellen zu versuchen. Es ist ferner der Geltungsbereich der vereinfachten Lösung, die man auf diese Weise erhält, festzustellen. Ferner ist die auf diesen mathematischen Modellen aufgebaute Theorie an wirklichen Modellen zu prüfen. Schließlich müssen selbstverständlich die Experimente an dem wirklichen Ohr den Entscheid über die Bedeutung der Schematisierung ergeben. Die durch die Analyse der Modelle gewonnenen Grundsätze ergeben einen vorzüglichen Leitfaden für die Experimentaluntersuchung.

Durch den schalleitenden Apparat werden die Druckschwankungen in den Schallwellen, die auf das Ohr treffen, in Be-

[1]) Erste Mitteilung Januar 1922.

[2]) 1915 und 1918.

wegungen der Lymphe des Labyrinths umgesetzt. Diese Übertragung könnte durch eine Kolbeneinrichtung erfolgen, wie sie in der Fig. 1, I angegeben ist. Der mit einer Feder versehene Kolben, auf den die Schallwellen auftreffen, hat wie das Trommelfell, eine verhältnismäßig große Fläche, während der Eingang der Schnecke, das ovale Fenster, klein ist. Das Verhältnis der beiden Flächen beträgt 60 $mm^2/3 \cdot mm^2$. Die Kraft, die auf den kleinen Kolben wirkt, wird dadurch um das 20 fache gesteigert, und ebenso stark die Empfindlichkeit, d. h. die Verrückung der Steigbügelplatte dividiert durch den einwirkenden Druck. Die erste Hauptgröße, welche die Leistung des schalleitenden Apparates bestimmt, ist die Empfindlichkeit, die zweite ist die Schwingungszahl oder die Frequenz. Je höher die Schwingungszahl ist, um so getreuer werden verwickelte Schwingungsbilder wieder gegeben. Ich habe früher die Grundsätze eines derartigen Apparates verglichen mit der Leistung eines abbildenden optischen Apparates, und habe das Quadrat der Schwingungszahl als das Auflösungsvermögen bezeichnet, während die Empfindlichkeit mit der Vergrößerung zu vergleichen ist. Das Produkt aus beiden habe ich die Güte eines Registrierapparates genannt. Bei einem System von einem Freiheitsgrad, wie bei dem Kolbenmodell, ist es der reziproke Wert der Masse. Auch für den schalleitenden Apparat wird sich der Begriff der Güte als dienlich erweisen.

Zwischen dem Kolben und der Steigbügelplatte habe ich in dem Modell eine starre Verbindung angenommen. Die Koppelung ist eine absolut zwangläufige. Der Organismus kann nicht derartige Kolben bilden, das Material ist nicht zu beschaffen. Die Dichtung ist unmöglich. Bei dem Ohr ist an der Stelle des ersten Kolbens eine Membran vorhanden. In diese Membran ist bei einigen Tieren, wie bei dem Frosch, ein scheibenartiges, bei anderen, wie bei dem Menschen, ein stabartiges Gebilde, der Hammer, eingefügt, das durch einen Stift oder eine Kette von elastisch miteinander verknüpften Knöchelchen, den Gehörknöchelchen, mit der Steigbügelplatte verbunden ist. Die Steigbügelplatte ist sehr enge durch eine Membran in die Labyrinthöffnung eingefügt. Die Koppelung des Schall aufnehmenden Teils mit der Steigbügelplatte ist nicht mehr so eng wie bei dem Kolbenmechanismus. Dadurch wird zunächst die Empfindlichkeit herabgesetzt. Es wird

zu erörtern sein, welche Veränderungen der mechanischen Verhältnisse gegenüber den des Kolbenmechanismus eintreten. Im Mittelpunkt der ganzen Abhandlung steht somit die Analyse der Modelle II und III, die in der Figur angegeben sind.

Bei dem Modell II findet eine fortschreitende Bewegung, bei dem Modell III eine drehende Bewegung des in die Membran eingefügten Körpers statt. Die Mechanik des Kolbenmechanismus behandle ich nicht im einzelnen, sie ist, wie ich schon oben angedeutet habe, so durchsichtig, daß eine besondere Untersuchung nicht notwendig ist. Aber es ist kein Zweifel, daß die richtige Beurteilung des schalleitenden Mechanismus nur durch einen Vergleich der verschiedenen Konstruktionsmöglichkeiten der Einrichtung erreicht wird. Ebenso wie bei meiner Analyse der Registrierinstrumente wird auch hier die Untersuchung des Kolbenmechanismus als des einfachsten eine wichtige Rolle spielen.

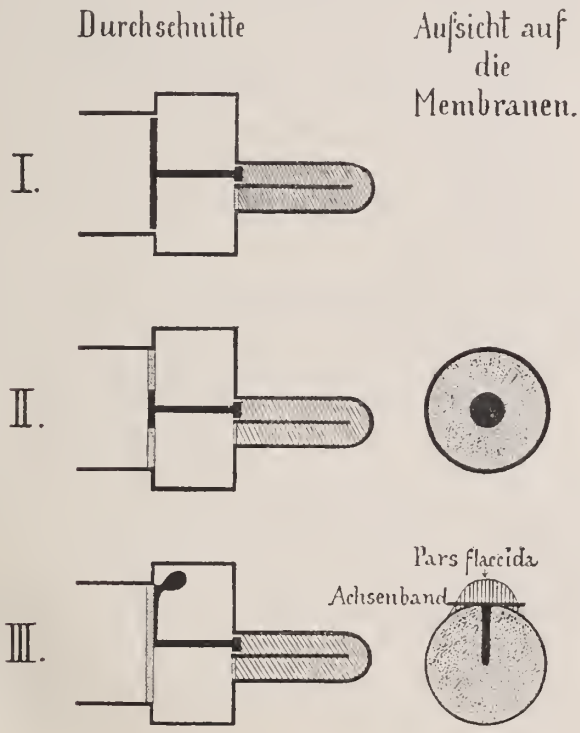


Fig. 1.

1. Statik des schalleitenden Apparates.

Bei der Statik handelt es sich um die Ermittelungen der Verrückungen der einzelnen Teile des Apparates, die unter der Einwirkung von Kräften erfolgen. In Betracht kommt bei der Einwirkung des Schalls schließlich nur ein allgemeiner Druck, der auf die Membran bzw. den Kolben einwirkt. Den Quotient aus der Verrückung (lineare Verrückung oder Winkeldrehung) dividiert durch den Druck bezeichne ich mit γ. Die wesentliche Verrückung ist diejenige der Steigbügelplatte. Ihre Größe, dividiert durch den einwirkenden Druck, ist die eigentliche Empfindlichkeit. Dies ist der Wert, der für die Leistung des Ganzen maßgebend ist, während bei den anderen Gehörknöchelchen diese Größen nur für die Analyse wichtig sind. Ähnlich verhält es sich mit einem anderen Quotienten. Er ist das Verhältnis einer auf die Scheibe oder den Stab (Hammer) einwirkenden Einzelkraft P (eines Drehmomentes) zu einer Verrückung. Ich habe diesen Koeffizienten bei den Registrierinstrumenten mit η bezeichnet. Weiter ist für die theoretische Analyse und die experimentelle Untersuchung die Feststellung des Koeffizienten E' wichtig. E' ist das Verhältnis des auf die Membran einwirkenden Drucks zu dem Volumen der Ausbauchung der Membran. Und schließlich wird sich als wertvoll erweisen die Kenntnis der Koppelungszahl K_{T_r} für die Membran. Sie ist $= E' \eta \gamma^2$. Die Koppelungszahl ist unabhängig von der Spannung der Membran und von dem Radius der kreisförmigen Begrenzung. Sie ist nur bedingt durch die Art der Einfügung des starren Körpers — Scheibe oder Stab usw. — in die Membran K_{T_r} wechselt zwischen 0 bei unendlich loser Koppelung und 1 bei zwangsläufiger Verbindung. Füllt das in die Membran eingefügte Gebilde die ganze Fläche der Membran aus, so wird die Koppelung $= 1$.

Die Analyse der Statik der Membransysteme beruht auf den beiden Differentialgleichungen 1) $\nabla w = 0$, 2) $\nabla w = -p/S$. (Hierin ist w die Verrückung des Membranpunktes senkrecht gegen die Kreisfläche, S die konstante Spannung.) Die erstere kommt dann in Betracht, wenn nur an bestimmten Punkten oder Linien Kräfte angreifen. Die letztere, wenn ein gleichmäßiger Druck p auf die Membran wirkt.

Statik der Modelle des schalleitenden Apparates.

Membran mit Scheibe in der Mitte.

Das System ist zentrosymetrisch. Die beiden Differentialgleichungen lauten in der Polarkoordinate r ausgedrückt:

$$1)\ \frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=0 \text{ und } 2)\ \frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=-\frac{p}{S}.$$

Die erstere gilt für eine zentrische Kraft P, die letztere für einen gleichmäßigen Druck p auf Membran und Scheibe. Die Lösungen, die ich in verschiedenen Abhandlungen (Zeitschrift für Biologie) behandelt habe, führt zu:

$$1)\ w=\frac{P}{2S\pi}\,l\left(\frac{a}{r}\right),\quad 2)\ w=\frac{p}{4S}(a^2-r^2).$$

Aus den beiden Lösungen ergibt sich, wenn f die Verrückung der Scheibe, δ das Verhältnis des Radius der Scheibe zu dem äußeren Radius a ist:

$$\gamma=\frac{f}{p}=\frac{a^2(1-\delta^2)}{4S},\qquad \eta=\frac{P}{f}=\frac{2\pi S}{l\left(\frac{1}{\delta}\right)},$$

$$E'=\frac{p}{V}=\frac{8S}{a^4(1-\delta^4)\pi},\quad K=\frac{1-\delta^2}{(1+\delta^2)\,l\left(\frac{1}{\delta}\right)}.$$

Für den Anschluß der Gehörknöchelchenkette an die Membran mit der Scheibe verweise ich auf die Ausführungen in dem nächsten Kapitel: Membran mit Stab.

Membran mit radiär gestelltem Stab.

Die Grundkoeffizienten γ und η nehmen hier eine etwas andere Form an, weil die Verrückung nicht lineär ist, sondern in dem Drehungswinkel α besteht. Die Empfindlichkeit des Systems γ ist das Verhältnis dieses Winkels α zu dem Druck, der die Deformation bewirkt. Also $\gamma=\alpha/p$. Ähnlich ist η das Verhältnis des Drehmomentes, das an dem Stab wirkt, zu α. Also $\eta=\frac{Mom}{\alpha}$. Die frühere Definition für E' und für K bleibt bestehen.

Zur Auswertung dieser Größen muß man die Deformation der Membran bestimmen, die 1. durch ein Drehmoment, das auf den Stab wirkt, und 2. durch einen Druck p hervorgerufen wird. Die Differentialgleichungen für diese Deformationen lauten:

$$1)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

$$2)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} = -\frac{p}{S},$$

worin r bzw. $r/a = \varrho$ und ϑ die Polarkoordinaten sind, vgl. Fig. 2. (In der Figur steht φ statt ϑ.) Die Lösung der Differentialgleichungen kann nach der Dissertation von Schaetz in Fourierschen Reihen erfolgen. (Titel der Dissertation: Über die Druckempfindlichkeit einer kreisförmigen Membran, II. Sektion der philos. Fakultät, München 1921). Für die Lösung der Differentialgleichung wird w in zwei Teile, w_1 und w_2, zerlegt. w_1 ist die Lösung für die Differentialgleichung 1, die bei dem Problem 2 als „verkürzte" Differentialgleichung anzusehen ist, unter den Randbedingungen 1) $w = 0$ für $\varrho = 1$, 2) $w = \alpha a(1 - \varrho)$ für $\vartheta = \pm\pi$. α ist hierin der Erhebungswinkel des Stabes. w_2 ist die Lösung der Differentialgleichung 2 unter den vereinfachten Randbedingungen $w = 0$ für $\vartheta = \pm\pi$ und für $\varrho = 1$, d. h. für den festliegenden Stab. Die Randbedingungen für w_2 stören die Bedingungen für w_1 nicht. Also ist $w = w_1 + w_2$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2 für den frei sich bewegenden Stab. Die beiden Verrückungen superponieren sich. Hierzu kommt noch eine Bedingung, die durch die Unstetigkeit der Differentialquotienten an der Stelle des Stabs notwendig wird.

Die Lösungen für w_1 und w_2 in Fouriersche Reihen lauten:

$$w_1 = \alpha a\left[1 + \varrho\cos\vartheta + \frac{16}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}\varrho^{n+\frac{1}{2}}\cos\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta\right] \quad (3)$$

$$w_2 = \frac{16\,a^2 p}{\pi S}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(\varrho^2 - \varrho^{n+\frac{1}{2}})\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta}{(2n-3)(2n+1)(2n+5)} \quad (4)$$

$$w = w_1 + w_2.$$

Man sieht, daß noch eine Beziehung zwischen w_1 und w_2 hergestellt werden muß, damit der Drehungswinkel α herausfällt.

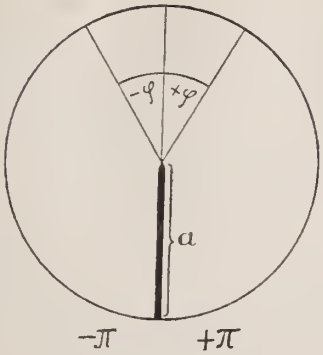


Fig. 2.

Sie wird durch die Berücksichtigung des Drehmoments ermittelt, das durch die Spannung S an dem Stab erzeugt wird. Wird der Stab ohne Einwirkung eines Drucks um den Winkel α aus der Kreisebene herausgedreht, so erzeugt die Spannung S das Moment M_1, Es läßt sich aus der Lösung w_1 nach der Formel berechnen:

$$Mom_1 = 2\,a\,S \int_0^1 \frac{1-\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial w_1}{\partial \vartheta}\right)_\pi d\varrho\,. \tag{5}$$

Es wird zu: $1.9514\,\alpha a^2 S$. Das Moment durch den Winkel α dividiert, gibt

$$\eta = 1.9514\,a^2 S\,. \tag{6}$$

Wirkt ein Druck auf die Membran bei feststehendem Stab, so übt die Spannung ein Moment an dem Stab

$$= 2\,a\,S \int_0^1 \frac{1-\varrho}{\varrho} \left(\frac{\partial w_2}{\partial \vartheta}\right)_\pi \cdot d\varrho = -\,0.5658\,a^3 p,$$

dem durch die Reaktionskraft das Gleichgewicht gehalten wird. Bei der Superposition der beiden Einwirkungen ergibt sich das Gesamtmoment $= M_1 + M_2$. Es muß, da keine äußeren Kräfte bei der alleinigen Druckwirkung p in Betracht kommen $= 0$ sein. Also $M_1 + M_2 = 0$. Diese Gleichung ergibt die gesuchte Beziehung zwischen a und p, d. h. die Größe γ. Sie wird zu

$$\gamma = \frac{a}{p} = 0.2899\,\frac{a}{S}. \tag{7}$$

In der Dissertation von Schaetz sind ferner noch die Fälle behandelt, bei denen der Stab kürzer oder länger als der Radius des Kreises ist. Eine prinzipielle Lösung läßt sich mit Green'schen Funktionen ausführen. Aber die numerische Auswertung ist sehr schwierig. Das Hauptergebnis ist die Bestimmung des Differentialquotienten der Funktion $\gamma = f(\delta)$, worin δ die Länge des Stabs dividiert durch a ist, für den Mittelpunkt des Kreises. Er ist gleich $\frac{128}{9\pi} a a^2 S$ (Schaetz, Gl. 63). Für die Stablänge 0 ist nach einfachen Überlegungen die Empfindlichkeit $\gamma = \frac{a}{2S}$ zu ermitteln. Für die Stablänge $2a$ ist $\gamma = 0$, vgl. S. 19. Der analytische Beweis für das Letztere ist in einem Zusatz zu der Dissertation gegeben. Berücksichtigt man diese vier Größen, so kann man eine Parabel dritten Grades konstruieren, welche die Abhängigkeit der Empfindlichkeit γ von der Länge des Stabs angibt.

$$\gamma = (-0.04123\,\delta^3 + 0.08376\,\delta^2 - 0.2526\,\delta + 0.5000)\frac{a}{S}. \quad (8)$$

Die Ermittlung von E' ist nicht in der Abhandlung von Schaetz enthalten. Hierzu muß das Volumen der durch den Druck p ausgebauchten Membran ausgewertet werden. Es ist

$$V = a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{1} w_1 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta + a^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{0}^{1} w_2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Das erste Integral V_1 zerfällt in drei Terme, vgl. S. 16. Sie werden

$$V_1 = a a^3 \pi,\ V_{II} = 0,\ V_{III} = \frac{128 a a^3}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)}$$
$$= -2.576\, a a^3;\ V_1 \text{ wird dann gleich } 0.566\, a a^3. \quad (9)$$

V_1 ist das Volumen der Ausbauchung einer Membran, bei welcher der Stab um den Winkel α aus der Kreisebene herausgedreht wird.

$$V_2 \text{ ist } = \frac{16 p a^4}{\pi S} \sum \frac{1}{(2n+1)^2 (2n+5)^2}$$
$$= 0.2195\, \frac{a^4 p}{S}. \quad (10)$$

V_2 ist das Volumen der durch den Druck p ausgebauchten Membran bei festliegendem Stab.

$V = V_1 + V_2$ wird $= 0.566\, a a^3 + 0.2195\, \frac{a^4 p}{S}$. Durch die Beziehung $\gamma = \frac{a}{p} = \frac{0.2899\, a}{S}$ ergibt sich:

$$V = (0.1641 + 0.2195)\, \frac{a^4 p}{S} = \frac{0.3836\, a^4 p}{S}. \qquad (11)$$

Es ist das Volumen der durch den Druck p ausgebauchten Membran, wenn der Stab frei beweglich ist.

$E' = p/V$ ergibt sich hiernach für den frei beweglichen Stab zu:

$$E' = \frac{1}{0.3836}\, \frac{S}{a^4} = \frac{2.607\, S}{a^4} \qquad (12)$$

und für den festliegenden Stab zu: $\frac{4.556\, S}{a^4}$. (13)

Damit sind die drei Grundkoeffizienten η, γ und E' ermittelt.

Wie schon S. 14 auseinandergesetzt wurde, ist die Berechnung der Koppelungszahl K für die Beurteilung der Mechanik des Modells sehr wichtig.

$$K \text{ ist } = E' \eta \gamma^2.$$

Es setzt sich zusammen aus zwei Faktoren, welche die Spannung nicht enthalten und deshalb für die experimentelle Bestimmung der Konstanten bequem sind. Sie sind

$E'\gamma = a/V = \frac{0.7556}{a^3}$, für unendlich kleinen Stab gleich $\frac{1.273}{a^3}$

und der zweite Faktor $= \eta\gamma = 0.5658\, a^3$; das dimensionslose K wird hiernach $= 0.7556 \cdot 0.5658 = 0.4275$. (14)

Über die Abhängigkeit der Koppelungszahl K von der Länge des Stabs läßt sich eine wichtige allgemeine Bemerkung machen. Wenn die Länge des Stabs 0 ist, wird $K = 0$, weil hierbei die Empfindlichkeit γ, und ebenso E' endlich ist, während $\eta = 0$ wird. Ist andererseits die Länge des Stabs gleich dem Durchmesser des Kreises, so wird $\gamma = 0$ $\eta = \infty$, E' bleibt endlich. Da die Koppelungszahl γ^2 enthält und η zweifellos nicht von der Größenordnung ∞^2 wird, ist K für die Stablänge $2a$ wiederum 0. Die Koppelung muß also für eine mittlere Länge des Stabs ein

Maximum haben. Experimentelle Untersuchungen zeigen, daß diese Annahme berechtigt ist. Bei dem wirklichen Trommelfell hat der Stab eine derartige mittlere Länge.

Membran mit angeschlossenen Gehörknöchelchen.

In der Fig. 3 ist die Membran und die Scheibe durch kreisförmige (in Projektion elliptische) Umrahmung angegeben. Die Scheibe stellt zugleich den Hammer dar, wie m_1 und m_2 den Ambos und den Steigbügel. Die Koeffizienten der elastischen Verbindungen sind mit E_1, E_2, E_3, E_{12} und E_{23} bezeichnet. Die Koeffizienten E_1, E_2 und E_3 gelten für die elastischen Verbindungen mit den starren Wänden des Raums der Paukenhöhle. Die Wände sind durch Strichelung angegeben. Für den Hammer ist E_1 das Achsenband. Ebenso hat der Amboß eine elastische Aufhängung E_2. E_3 gibt die elastische Wirkung der Membran des ovalen Fensters. Die elastischen Verbindungen sind im allgemeinen durch Spiralfedern, für E_2 zur Vereinfachung der Figur durch einen biegsamen Stab angedeutet. E_{12} und E_{23} bestimmen die Verbindungen der Scheibe (Hammer), der Körper m_1 (Amboß) und m_2 (Steigbügel) untereinander. Die Verrückungen des Hammers und des Amboß bestehen in Drehungen um eine Achse, diejenige des Steigbügels ist wesentlich fortschreitend. (Die etwaigen Drehungen des Steigbügels sind im folgenden noch nicht berücksichtigt, vgl. unten S. 26.) Sie müssen ebenso wie die Elastizitätskoeffizienten einheitlich ausgedrückt werden. Man kann entweder alle Verrückungen in Winkeldrehungen und die Elastizitätskoeffizienten in Torsionsmomente oder umgekehrt alle Winkel-

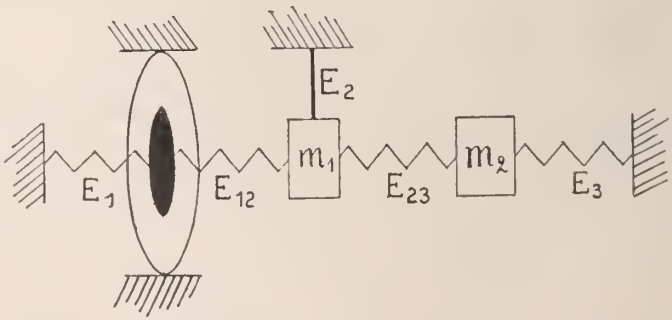


Fig. 3.

drehungen in lineare Verrückungen usw. umwandeln. Hierzu dient die folgende Überlegung.

Greift eine Feder mit dem Elastizitätskoeffizienten E an einem Hebel von der Länge l an, so ist das Moment des Federzugs $= Exl$, wenn x die Verrückung des Hebelendes ist. $Exl = aEl^2 = aT$. El^2 ist das Torsionsmoment T. So ist in den vorhergehenden Gleichungen an Stelle der Größen E_1, E_{12}, E_2, E_{23}, E_3 zu setzen: T_1, T_{12}, T_2, T_{23}, T_3. Wenn l die Entfernung der Amboßspitze von seiner Drehachse ist, so ist $T_{23} = l^2 \cdot E_{23}$ und $T_3 = l^2 \cdot E_3$.

Man kann andererseits auch alle Momente auf die Spitze des langen Amboßfortsatzes reduzieren.

Mit η_M bezeichne ich unterschiedslos entweder das Verhältnis des Drehmoments, das auf den Hammer wirkt, zu dem Drehungswinkel oder das Verhältnis der einwirkenden Kraft zu der fortschreitenden Verrückung des Reduktionspunktes. Ebenso halte ich es mit γ. In dem folgenden sind im allgemeinen die Verrückungen als fortschreitend angesehen und die Elastizitätskoeffizienten sind $= P/x$.

γ sei allgemein der Ausschlag eines Gehörknöchelchens für die Druckwirkung $p = 1$, η sei das Verhältnis einer am Hammer angreifenden Kraft (bzw. eines Drehmoments) zu dem Ausschlag eines Knöchelchens. Man kann die Verbindung zwischen Steigbügel und Amboß durchschneiden. Man kann ferner die Verbindung zwischen Amboß und Hammer durchtrennen. Ich bezeichne im letzteren Fall mit γ_M den Ausschlag des Hammers auf Einwirkung eines Drucks, wenn außerdem E_1, die Elastizität des Achsenbandes, nicht wirkt. Man kann das Achsenband ohne Verletzung der Membran nicht von dem Hammer ablösen, aber es gelingt, wie ich jetzt zeigen werde, dieses γ_M aus anderen Größen zu bestimmen. Mit γ_H bezeichne ich dieselbe Größe, wenn das Achsenband mit der Membran zusammenwirkt. Mit $\gamma_{(H+A)H}$ bezeichne ich die entsprechende Größe für ein System, bei dem noch der Amboß angeschlossen ist, also außerdem die Koeffizienten E_{12} und E_2 wirken. Im Index bezeichnet der Klammerausdruck das System. Hinter ihm ist der Körper angegeben, um dessen Verrückung es sich handelt. Mit $\gamma_{(H+A+S)H}$ bezeichne ich dieselbe Größe für das volle System. Ähnliches gilt für die ent-

sprechenden η-Größen. Die Elastizitätskoeffizienten sind die vorher angegebenen. Die durch Zusammenwirken dieser Koeffizienten entstehende elastische Wirkung bezeichne ich durch Angabe der Grenzen für die Wirkung dieser Koeffizienten. So umschließt z. B. der Elastizitätskoeffizient, der mit $E_{Amb.-fenest.oval}$ bezeichnet wird, die elastische Kraft, die durch E_{23} und E_3 auf den Amboß ausgeübt wird. Ihre Größe folgt aus den weiteren Entwickelungen, vgl. S. 25.

Für die Membran beruhen die nachfolgenden Berechnungen auf der Annahme einer Superposition der Ausschläge, die durch den Druck und eine Einzelkraft hervorgerufen werden. Der Ausschlag der Hammerspitze sei mit ζ bezeichnet. Dann ist, wenn bei dem System: Membran mit Hammer ohne Achsenband eine Kraft P auf den Hammer wirkt, $\zeta = \frac{P}{\eta_M}$. Für einen Druck p auf die Membran wird $\zeta = p \cdot \gamma_M$. Wenn P und p zu gleicher Zeit wirken, so wird der Ausschlag $\zeta = p\gamma_M \pm \frac{P}{\eta_M}$. Wenn die Kraft P durch Federdruck $E_1\zeta$ (Achsenband) erzeugt wird, so resultiert $\zeta = p\gamma_M - \frac{E_1\zeta}{\eta_M}$ oder $\frac{\zeta}{p} = \gamma_H = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_1}$. (15)

Wenn die Kraft P und der Federdruck von E_1 wirkt, dann erhalten wir

$$\zeta = \frac{P}{\eta_M} - \frac{E_1\zeta}{\eta_M}. \quad \text{Daraus } \eta_H = \eta_M + E_1. \tag{16}$$

Bei Anschluß des Amboßes ergeben sich, in ähnlicher Weise abgeleitet, folgende Beziehungen:

$$\gamma_{(H+A)H} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_1 + E_{(H-A)}}; \quad \eta_{(H+A)H} = \eta_M + E_1 + E_{(H-A)}. \tag{17}$$

Wird noch der Steigbügel angeschlossen, so ergibt sich wieder

$$\gamma_{(H+A+S)H} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_1 + E_{(H-ov.F.)}}; \quad \eta_{(H+A+S)H} = \eta_M + E_1 + E_{(H-ov.F.)}. \tag{18}$$

Auf diese Weise kann man die verschiedenen γ auseinander berechnen. Vor allen Dingen kann man für das System Membran mit Hammer und Achsenband die Empfindlichkeit für die Membran allein bestimmen nach der Formel $\gamma_M = \frac{\gamma_H(\eta_M + E_1)}{\eta_M}$.

Dazu ist notwendig die Kenntnis der Empfindlichkeit für die Membran mit dem Achsenband γ_H und ebenso des entsprechenden η_H. Dann muß noch der Elastizitätskoeffizient E_1 des Achsenbandes bestimmt werden. E_1 wird nach dem Abschneiden der Membran von dem Hammer wie gewöhnlich durch Belastung der Hammerspitze mit Gewichten und Bestimmung der Winkeldrehung erhalten

$$\eta_M \text{ ist dann } = \eta_H - E_1.$$

Die Empfindlichkeiten γ können entweder Winkelempfindlichkeiten $\gamma_a = \frac{a}{p}$ oder Empfindlichkeiten $\gamma_f = \frac{f}{p}$ für lineare Verrückungen f eines bestimmten Gehörknöchelchens sein. Die lineäre Empfindlichkeit γ_f geht aus der Winkelempfindlichkeit γ_a hervor, wenn γ_a mit l d. i. die Entfernung des betreffenden Punktes eines Gehörknöchelchens von der Drehachse multipliziert wird, also $\gamma_f = l\gamma_a$. So ist z. B. $\gamma_{f(H+A)H} = \frac{l\gamma_{aM}\eta_M}{\eta_{(H+A)H}}$. Für die η gilt Ähnliches. Die η der Formeln für γ müssen im Zähler und Nenner homogen sein, d. h. entweder gewöhnliche Elastizitätskoeffizienten oder Torsionsmomente sein.

Die Empfindlichkeiten für andere Gehörknöchelchen werden aus der Hammer-Empfindlichkeit, für das System $(H + A)$ durch Multiplikation mit D_2/D_1 und für das System $(H + A + S)$ mit D_2/D_1 und D_3/D_1 erhalten. Also z. B.

$$\gamma_{(H+A+S)S} = \frac{D_3}{D_1}\gamma_{(H+A+S)H}.$$

Die Größen D sind unten angegeben.

Zur Bestimmung von E' bei der Wirkung eines Federzuges an dem Hammer ist zunächst die Kenntnis des Volumens der Ausbauchung notwendig, die durch die Ausübung eines Drehmomentes an dem Hammer erzeugt wird. Nach der Formel (9) ist dieses Volumen $V_1 = \frac{0.566\, a^3\, Mom}{\eta_M}$. Wenn T_{tot} das gesamte Torsionsmoment ist, das durch die Spannungen des Achsenbandes, der Verbindung Hammer-Amboß etc. bis zur Membran des ovalen Fensters hervorgerufen wird, dann ist das Drehmoment dieser Spannungen $= \alpha T_{tot}$. Da ferner $\alpha = \gamma_{tot} p$ ist, wird

$$V_1 = \frac{0.566\, a^3\, p\, T_{tot}\, \gamma_{tot}}{\eta_M}.$$

Da ferner $\gamma_{tot} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + T_{tot}}$ ist, wird $V_1 = \frac{0.566\, a^3\, p \cdot \gamma_M \cdot T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}}$.

Im besonderen Fall $T_{tot} = \infty$ d. h. bei festliegendem Hammer wird $V_1 = 0.566\, a a^3$, vgl. Formel (9).

Das Volumen der Ausbauchung, die erzeugt wird, wenn außer dem elastischen Zug ein Druck auf die Membran wirkt, setzt sich additiv zusammen aus dem Volumen, das sich durch die Einwirkung eines Drucks allein — ohne Federzug — auf die Membran ergibt, und dem Volumen V_1, das der elastische Zug hervorruft. Das erstere ist $= \frac{0.3836\, a^4 p}{S}$, vgl. (10). Also

$$V = \frac{0.3836\, a^4 p}{S} - \frac{0.566\, a^3\, p\, \gamma_M \cdot T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}}.$$

Da $0.566\, \gamma_M = 0.566 \times 0.2899\, a/S = 0.1641\, a/S$ ist, so wird

$$V = \left(0.3836 - \frac{0.1641\, T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}}\right) \frac{a^4 p}{S} = \frac{0.3836\, \eta_M + 0.2195\, T_{tot}}{\eta_M + T_{tot}} \cdot \frac{a^4 p}{S} \quad (19)$$

oder $E' = \frac{\eta_M + T_{tot}}{0.3836\, \eta_M + 0.2195\, T_{tot}} \cdot \frac{S}{a^4}$. (20)

Im besonderen Fall $T_{tot} = \infty$ wird $E' = 4.556\, S/a^4$, vgl. oben (13). Bemerkenswert ist die Größe der allgemeinen Koppelungszahl K für den ganzen Schalleitungsapparat. Die Entwicklung ergibt folgendes:

$$K = E' \eta \gamma^2 = \frac{(\eta_M + T_{tot})\, S}{(0.3836\, \eta_M + 0.2195\, T_{tot})\, a^4} \cdot (\eta_M + T_{tot}) \left(\frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + T_{tot}}\right)^2$$

$$= \frac{\gamma_M^2\, \eta_M^2\, S}{(0.3836\, \eta_M + 0.2195\, T_{tot})\, a^4}, \quad (21)$$

d. h. K nimmt mit wachsendem T_{tot} von $\frac{\gamma_M^2\, \eta_M\, S}{0.3836\, a^4} = 0.4275$, wobei keinerlei elastischer Zug auf die Membran wirkt, bis 0 für $T_{tot} = \infty$ ab. Wenn nun die bei dem wirklichen Ohr gefundene Koppelungszahl K größer ist als 0.4275, wie dies tatsächlich der Fall ist, so ist das K für das Trommelfell ohne Federzug sicher größer bzw. das Trommelfell ist enger gekoppelt mit der Gehör-

knöchelchenkette als bei der ebenen Membran. Dies ist zweifellos durch die trichterförmige Form und das längere Hineinragen des Hammergriffs in die Mitte des Trommelfells als bis zur Mitte bedingt.

Experimentelle Bestimmung und Berechnung der einzelnen Elastizitätskoeffizienten der Gehörknöchelchenkette.

Die einzelnen Elastizitätskoeffizienten η_H, E_{12}, E_2, E_{23} und E_3 der Gehörknöchelchenkette lassen sich berechnen, wenn man die Verrückungen der einzelnen Gehörknöchelchen feststellt, die durch eine auf den Hammer wirkende Kraft (Drehmoment) hervorgerufen werden. Sie können aber nur dann insgesamt ermittelt werden, wenn man eine Zerlegung der Kette vornimmt. Und zwar sind zur Berechnung notwendig: Die Verrückungen von Amboß und Steigbügel für das ganze System, nach Abtrennung des Steigbügels die Verrückungen von Hammer und Amboß und nach weiterem Abtrennen des Amboß die Verrückung des Hammers. 1. Ich behandle zunächst das einfachste System: Membran mit Hammer allein. Durch das Experiment kann ohne weiteres das η_H (Membran mit Achsenband) bestimmt werden. 2. System nur aus Membran, Hammer und Amboß bestehend, Steigbügel abgeschnitten. Die Gleichungen für die Statik lauten (vgl. zweite Akademieabhandlung S. 117):

$$C_1 x_1 + C_{12} x_2 = P, \quad C_{12} x_1 + C_2 x_2 = 0,$$

worin $C_1 = \eta_H + E_{12}$, $C_2 = E_{12} + E_2$, $C_{12} = -E_{12}$.

Die Lösung für die Verrückungen ergeben: $x_1 = P D_1 / D$, $x_2 = P D_2 / D$, worin $D = \eta_H E_{12} + \eta_H E_2 + E_{12} E_2$, $D_1 = E_{12} + E_2$, $D_2 = E_{12}$. Das Verhältnis der Verrückungen $\frac{x_2}{x_1}$ ist $= D_2 / D_1$.

Bezeichnet man $P / x_1 = D / D_1$ mit η_1 und $P / x_2 = D / D_2$ mit η_2 und löst nach den unbekannten Größen E_{12} und E_2 auf, so erhält man:

$$E_{12} = \frac{\eta_2 (\eta_1 - \eta_H)}{\eta_2 - \eta_1}, \quad E_2 = \frac{\eta_2 (\eta_1 - \eta_H)}{\eta_1}. \tag{22}$$

3. Vollständiges System. Man kann die Verrückungen x_1 des Hammers, x_2 des Ambosses und x_3 des Steigbügels durch eine am

Hammer angreifende Kraft P bzw. ein Drehmoment nach den Grundsätzen der Statik eines Systems von 3 Freiheitsgraden bestimmen, vgl. die zweite Akademieabhandlung S. 145.

Die Gleichungen für die Verrückungen lauten:

$$C_1 x_1 + C_{12} x_2 = P, \quad C_{12} x_1 + C_2 x_2 + C_{23} x_3 = 0, \quad C_{23} x_2 + C_3 x_3 = 0,$$

worin $C_1 = \eta_H + E_{12}$, $C_2 = E_{12} + E_2 + E_{23}$, $C_3 = E_{23} + E_3$,

$$C_{12} = -E_{12}, \quad C_{23} = -E_{23}.$$

Die Auflösung nach x_1, x_2 und x_3 führt man am besten in Determinantenform durch. Sie ergibt: $x_1 = PD_1/D$, $x_2 = PD_2/D$, $x_3 = PD_3/D$, worin die Determinanten

$$D = (\eta_H E_{12} + \eta_H E_2 + E_{12} E_2)(E_{23} + E_3) + (\eta_H + E_{12}) E_{23} E_3$$

$$D_1 = (E_{12} + E_2)(E_{23} + E_3) + E_{23} E_3, \quad D_2 = E_{12}(E_{23} + E_3), \quad D_3 = E_{12} E_{23}.$$

Die Verhältnisse der Verrückungen zueinander sind stets:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{D_2}{D_1}, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{D_3}{D_1}, \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{D_3}{D_2}.$$

Wenn P/x_1 mit η_1 etc. bezeichnet wird, dann ist

$$\eta_1 = D/D_1, \quad \eta_2 = D/D_2, \quad \eta_3 = D/D_3.$$

Bei Kenntnis von η_H, E_{12} und E_2 lassen sich aus η_1 und η_3 oder η_2 und η_3, wie schon oben bemerkt, die Größen E_{23} und E_3 durch diese Beziehungen berechnen. Es wird:

$$E_{23} = \frac{(E_{12}\eta_2 - \eta_H E_{12} - \eta_H E_2 - E_{12} E_2)\eta_3}{(\eta_H + E_{12})(\eta_3 - \eta_2)}$$

$$E_3 = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_2} E_{23}. \tag{23}$$

Aus diesen Größen kann man weiterhin die Koppelungszahlen K_{12} und K_{23} für die Verbindung von Hammer und Amboß und Amboß und Steigbügel ermitteln.

Wenn auch die Drehung der Steigbügelplatte berücksichtigt werden soll, muß noch eine Verrückung x_4 aufgenommen und der entsprechende Elastizitätskoeffizient berechnet werden.

2. Dynamik des schalleitenden Apparates.

Das allgemeine Schwingungsproblem.

Ein elastisches System führe Schwingungen aus und zwar freie und erzwungene Schwingungen. Die Analyse dieser Schwingungen wird außerordentlich vereinfacht, wenn man die „Normal-Koordinaten“ φ (W. Thomson, Rayleigh) einführt. Sie gehen aus den Verrückungen x durch eine lineare Transformation hervor. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß in den Ausdrücken für die kinetische und potentielle Energie ihre Produkte $\varphi_r \varphi_s$ nicht auftreten. Man kann also die beiden Ausdrücke folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} \Sigma a_s \dot{\varphi}_s^2 \\ V &= \tfrac{1}{2} \Sigma c_s \varphi_s^2 . \end{aligned} \tag{24}$$

Die Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen werden dadurch sehr einfach. Sie nehmen (nach Lagrange) die Form an:

$$a_s \ddot{\varphi}_s + c_s \varphi_s = 0.$$

Die Lösungen sind: $\varphi_s = A_s \cos (n_s t - \alpha).$ (25)

Dabei sind die Frequenzen n_s bestimmt durch $n_s^2 = \dfrac{c_s}{a_s}$.

Die Schwingungen, die durch die verschiedenen Normalkoordinaten ausgedrückt werden, sind vollständig selbständig und unabhängig von einander. Im Allgemeinen können sie wie Schwingungen eines Systems von einem Freiheitsgrad behandelt werden.

Für die erzwungenen Schwingungen gilt die entsprechende Beziehung:

$$a_s \ddot{\varphi}_s + c_s \varphi_s = \Phi_s \tag{26}$$

$\Phi_s \delta \varphi_s$ ist die Arbeit, die auf das System von den eingeprägten (äußeren) Kräften P_1, P_2, etc. während der diesen Kräften entsprechenden virtuellen Verrückungen δx_1, δx_2 etc. geleistet wird.

Vielleicht ist die Bedeutung der Normalkoordinaten für kontinuierliche Systeme noch größer als für Systeme mit diskreten Massen. Für die kontinuierlichen Systeme werden die Bewegungsgleichungen zu partiellen Differentialgleichungen. Für eine Reihe

von Systemen, nämlich die Saite, die Membran, die Platte, den Stab, die Luft in begrenzten Räumen und, ich füge hier hinzu, für elastische Schläuche, die mit Flüssigkeit gefüllt sind, lassen sich die Lösungen dieser Differentialgleichungen in folgender Form anschreiben: Die Verrückung eines Punktes ζ des Systems wird:

$$\zeta = \Sigma \zeta_s, \quad \zeta_s = \varphi_s u_s \quad \text{oder} \quad \zeta = \Sigma \varphi_s u_s. \tag{27}$$

In der Formel sind die Größen u_s die „Normalfunktionen". Ihre Form ist verschieden je nach der Art des Systems. Z. B. bei der Saite eine trigonometrische Funktion der Länge, bei der kreisförmigen Membran eine Besselfunktion des Radius r, verknüpft mit trigonometrischen Funktionen des Winkels ϑ etc. Sie enthalten die Zeit nicht. Am bequemsten wird man sie dimensionslos lassen. Ihre Form wird durch die räumlichen Grenzbedingungen bestimmt, während die Normalkoordinaten die zeitlichen Bedingungen zu erfüllen haben.

Die Summenzeichen in den Formeln (27) geben unendliche Reihen an, während sich die Summen bei den Systemen mit diskreten Maßen auf eine durch die Zahl der Freiheitsgrade beschränkte Zahl von Gliedern erstreckt.

Die kinetische Energie wird nach der Einführung der Normalfunktionen: $T = \frac{1}{2} \Sigma \dot{\varphi}_s^2 \int \varrho u_s^2 dx$, worin dx das Element einer Strecke oder Fläche oder des Raums je nach der Dimensionalität des Systems ist. $\varrho\, dx$ ist die Masse eines Elements. Wenn man dieses T mit dem obigen vergleicht, so entspricht a_s: $\int \varrho u_s^2 dx$ und $e_s : n_s^2 \int \varrho u_s^2 dx$. Also

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} \Sigma \dot{\varphi}_s^2 \int \varrho u_s^2 dx, \\ V &= \tfrac{1}{2} \Sigma \varphi_s^2 n_s^2 \int \varrho u_s^2 dx \end{aligned} \tag{28}$$

und es resultiert die allgemeine Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi}_s \int \varrho u_s^2 dx + n_s^2 \varphi_s \int \varrho u_s^2 dx = \Phi_s.$$

Oder:

$$\ddot{\varphi}_s + n_s^2 \varphi_s = \frac{\Phi_s}{\int \varrho u_s^2 dx}. \tag{29}$$

Sie umfaßt 1. das Gleichgewicht, 2. die freien Schwingungen und deren Auslösung, 3. die erzwungenen Schwingungen. Ich behandle jetzt die verschiedenen Formeln für diese Fälle.

1. Gleichgewicht: $\ddot{\varphi}_s = 0$.

$$\text{Oder: } \varphi_s = \frac{\Phi_s}{n_s^2 \int \varrho u_s^2 dx} \text{ und } \zeta = \Sigma \frac{\Phi_s u_s(N)}{n_s^2 \int \varrho u_s^2 dx}. \quad (30)$$

$u_s(N)$ bedeutet u_s für den Punkt N, zu dem ζ durch die Formel angegeben wird.

2. Freie Schwingungen: Wird das System durch Kräfte aus der ungestörten Lage gebracht, wodurch die Verrückung für den Gleichgewichtsfall 1 erzeugt wird, und dann losgelassen, so geben die folgenden Ausdrücke den Bewegungsvorgang wieder.

$$\varphi_s = (\varphi_s)_{t=0} \cos n_s t = \frac{\Phi_s \cos n_s t}{n_s^2 \int \varrho u_s^2 dx}; \quad \zeta = \Sigma \frac{\Phi_s u_s(N) \cos n_s t}{n_s^2 \int \varrho u_s^2 dx}. \quad (31)$$

Die Auslösung durch einen Impuls behandle ich hier nicht.

3. Erzwungene Schwingungen: Die einwirkende Kraft sei wie eine harmonische Funktion zeitlich veränderlich. Die Beziehungen lauten:

$$\ddot{\varphi}_s + n_s^2 \varphi_s = \frac{\Phi_s \cos \nu t}{\int \varrho u_s^2 dx}. \quad (32)$$

$$\text{Lösung: } \varphi_s = \frac{\Phi_s \cos \nu t}{(n^2 - \nu^2) \int \varrho u_s^2 dx}; \quad \zeta = \cos \nu t \, \Sigma \frac{\Phi_s u_s(N)}{\left(1 - \frac{\nu^2}{n_s^2}\right) n_s^2 \int \varrho u_s^2 dx}.$$

Die Ausdrücke für Φ lassen sich aus den eingeprägten Kräften Z nach dem obigen Satz ableiten. Die Kräfte sollen an den Punkten Q wirken. $\Phi_s \delta \varphi_s$ ist die Arbeit, die von den eingeprägten Kräften Z während der virtuellen Verrückung $\delta \zeta = \delta \varphi_s u_s$ geleistet wird. Dann besteht die Beziehung $\Phi_s \delta \varphi_s = \delta \varphi_s \Sigma \int u_s Q_m Z_m dx$ oder $\Phi_s = \Sigma \int u_s d_m Z_m dx$. Der Ausdruck nimmt verschiedene Form an, je nachdem es sich um eine einzelne Kraft P handelt, die in einem beschränkten Bezirk bzw. an einzelnem Punkt angreift, der die Größe von $u_s(Q)$ bestimmt, oder sich über die Elemente des Systems mit der Größe p gleichmäßig verteilt. Ich gebe die Werte an:

1. Die Kraft P greift an einem bestimmten Bezirk Q an

$$\Phi_s = u_s(Q) \int Z dx. \quad (33)$$

In vielen Fällen kann auch dafür gesetzt werden $\Phi_s = u_s(Q) Z$.

2. Die Kraft ist über die Raumelemente des Systems mit dem Wert p verteilt.

$$\Phi_s = \int p u_s \, dx = p \int u_s \, dx . \tag{34}$$

Bei kreisförmigen Membranen nehmen diese Gleichungen eine besondere Form an. Sie ist einmal dadurch bedingt, daß sich aus dem Ausdruck $\int \varrho u_s^2 \, d\sigma$ ($d\sigma$ = Flächenelement) der Wert $a^2 \pi \varrho$ oder die gesamte Masse der Membran ausscheiden läßt, wenn die Dichte konstant ist. a ist hier der Radius der Membran. Es bleibt dann ein dimensionsloser Faktor übrig, den ich mit T_s bezeichne. Wir erhalten also:

$$\int u_s^2 \, d\sigma = a^2 \pi T_s . \tag{35}$$

Die Integration erstreckt sich hierbei zunächst über den deformierten Teil der Membranfläche. Wie weit Massen von einem in die Membran eingelassenen starren Körper einbezogen werden müssen, ergibt das einzelne Problem.

Die „charakteristische Gleichung“ oder „Wurzelgleichung“ für die Membranschwingungen besteht aus Besselfunktionen. Ihre Lösung sei μa. Für diese Wurzel besteht die Beziehung

$$a^2 n^2 \varrho = S (\mu a)^2 , \tag{36}$$

worin S die Spannung der Membran ist. Hierdurch ergibt sich für den allgemeinen Nenner der obigen Gleichungen: $n_s^2 \int \varrho u_s^2 \, d\sigma = \pi S (\mu a)^2 T_s$ und die Formeln lauten schließlich:

1. Gleichgewicht:

$$\zeta = \frac{1}{\pi S} \sum \frac{\Phi_s \mu_s (N)}{(\mu_s a)^2 T_s} . \tag{37}$$

2. Freie Schwingungen:

$$\zeta = \frac{1}{\pi S} \sum \frac{\Phi_s \mu_s (N) \cos n_s t}{(\mu_s a)^2 T_s} . \tag{38}$$

3. Erzwungene Schwingungen:

$$\zeta = \frac{\cos \nu T}{\pi S} \sum \frac{\Phi_s \mu_s (N)}{\left(1 - \frac{n_s^2}{\nu_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s} . \tag{39}$$

Die kontinuierlichen Systeme können an bestimmten Punkten mit diskreten Massen verbunden werden. Oder es können auch an bestimmten Punkten elastische Kräfte, z. B. Federzüge, angreifen. Oder es kann sich auch an das System ein anderes gekoppeltes System von einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden oder auch ein kontinuierliches System anschließen. Es sind jetzt die Lösungsmöglichkeiten für diese verschiedenen kombinierten Systeme anzugeben.

Für die Aufstellung der charakteristischen Gleichung stehen zwei Methoden zur Verfügung. Die eine ist nur anwendbar für eine Verbindung der Membran mit Massen, Federzügen oder auch elastisch gekoppelten Systemen, die an bestimmten Punkten der Membran erfolgt. Die zweite ist allgemein anwendbar. Sie entspringt aus den oben entwickelten Prinzipien, vgl. (24) bis (35). Die erste Methode habe ich schon früher, erste Akademieabhandlung 1915, benutzt. Ich habe sie als eine Anwendung des d'Alembertschen Prinzips bezeichnet. Man kann sie aber auch die Methode der Normalschwingungen oder einfachen harmonischen Schwingungen des Systems nennen. Die zweite Methode will ich als die Methode der inneren erzwungenen Schwingung bezeichnen. Die erste Methode versagt, wenn das mit der Membran verbundene System an den Elementen der Membran angreift. Sie würde zu einer neuen Differentialgleichung führen. Ich lasse vorläufig die Frage offen, in welcher Beziehung die beiden Methoden zueinander stehen und ob sie nicht einem gemeinsamen Prinzip unterzuordnen sind.

1. An einer endlichen Zahl von Punkten des Systems greifen die Trägheitskräfte von diskreten Massen oder diskrete elastische Kräfte an. Diese Fälle habe ich früher (vgl. oben) mit dem d'Alembert-Prinzip" behandelt. Man kann aber auch hier die Normalkoordinaten und Normalfunktionen dazu benutzen, um einen glatten Ausdruck für die Analyse zu erhalten.

Wenn es sich um diskrete Massen handelt, müssen an den Punkten, wo sie sich befinden, ihre Trägheitskräfte mit der elastischen Kraft des Systems an diesen Punkten im Gleichgewicht stehen. Es handelt sich z. B. um den Rand einer auf einer Membran befestigten starren Scheibe usw. Die freien Schwingungen seien, wie oben ausgedrückt, durch $\zeta = \Sigma \zeta_s = \Sigma \varphi_s \mu_s$.

Die elastischen Kräfte des Systems an den betreffenden Punkten werden bestimmt durch Differentialquotienten nach den Dimensionen des Systems. Z. B. am Ende einer Luftsäule durch den partiellen Differentialquotienten nach der Längsausdehnung der Luftsäule. Außerdem durch bestimmte elastische Koeffizienten K. Den Ausdruck für die elastische Kraft gebe ich darnach mit $K\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]\zeta$ an. Das Vorzeichen dieses Ausdrucks werde so gewählt, daß die Elastizitätskraft die positive Richtung von ζ erhält. Die Trägheitskraft ist dann $-M\ddot{\zeta}$. Es ergibt sich:

$$K\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]\zeta - M\ddot{\zeta} = 0.$$

Nun ist $\zeta = \Sigma u_s \varphi_s$. Da diese Beziehung für jedes Glied der Summe wegen der willkürlichen Konstanten, die in $u_s\varphi_s$ enthalten sind, gilt, so folgt:

$$K\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]u_s\varphi_s - M u_s\ddot{\varphi} = 0.$$

Nach der Bewegungsgleichung für φ_s ist $\ddot{\varphi}_s + n_s^2\varphi = 0$ oder $\ddot{\varphi}_s = -n_s^2\varphi_s$, und die obige Gleichung wird nach Elimination von φ_s:

$$K\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]u_s + M n^2 u_s = 0. \tag{40}$$

Eine diskrete elastische Kraft sei $e\zeta = e\Sigma u_s\varphi_s$. Da sie die Richtung von $-\zeta$ hat, muß das negative Zeichen für $e\zeta$ gewählt werden und man erhält, wofern die Masse an demselben Punkt vorhanden ist, an dem die elastische Kraft angreift, ähnlich wie vorher

$$K\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]u_s + (Mn^2 - e)\,u_s = 0. \tag{41}$$

In derselben Weise kann an einen Punkt des Hauptsystems ein weiteres gekoppeltes System angeschlossen werden. Z. B. an die Membran mit einer Scheibe in der Mitte oder mit dem Hammer die Kette der Gehörknöchelchen. Man muß hier nur die Kraft, die an der Verbindungsstelle von diesem angekoppelten System ausgeht, mit den elastischen Kräften $K\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\right]u_s$ in das

Gleichgewicht setzen. Auch hierbei stehen noch mehrere Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung. Man kann die Trägheitskraft der mit der Membran verbundenen Masse wie in dem vorher behandelten Beispiel zusammen mit dem elastischen Zug auf die Membran, deren Scheibe keine Masse hat, wirken lassen. Oder man kann den elastischen Zug an der Membran mit der trägen Masse angreifen lassen, wobei natürlich die besonderen Wurzeln für dieses letztere System eingeführt werden müssen. Alle diese Möglichkeiten führen zu verschiedenen Typen von Formeln. Aber zu demselben rechnerischen Ergebnis, trotzdem die Typen so verschieden sind, daß man ihre Identität nur schwer feststellen kann. Ich habe diese Identität an besonderen Beispielen erwiesen, die ich der Einfachheit der Berechnung halber, aus dem Gebiet der Saitenschwingung genommen habe.

2. Methode der inneren erzwungenen Schwingungen. Mit dem kontinuierlichen System ist ein anderes gekoppeltes System von einer endlichen oder unendlichen Zahl von Freiheitsgraden verbunden. Es handelt sich z. B. um die Verbindung einer trägen Membran mit einer Luftsäule, die sich in einer Röhre befindet. Oder um die Verbindung einer trägen Membran mit einer Kette von Massen u. dgl. Für die Behandlung dieser heterogenen Systemkomplexe habe ich ein Verfahren gefunden, das ich als das Prinzip der inneren erzwungenen Schwingung bezeichne. Man gibt hierzu dem einen System eine Frequenz, sagen wir q. Und erzeugt mit dieser Frequenz eine erzwungene Schwingung des zweiten Systems. Man kann an einem einfachen Beispiel, das aus zwei Massen m_1 und m_2 besteht, die zwischen Federn an zwei festen Punkten aufgehängt sind, das Prinzip veranschaulichen. Das System 1 besteht aus E_1, m_1 und E_2. Dann gilt:

$$m_1 x_1 + E_1 x_1 + E_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (1).$$

Ferner existieren die Beziehungen

$$x_1 = A \cos qt \quad (2), \qquad x_2 = B \cos qt \quad (3).$$

Durch Einsetzen von 2 und 3 in 1 ergibt sich:

$$- m_1 A q^2 + A E_1 + A E_2 - B E_2.$$

Daraus: $B = A (E_1 + E_2 - m_1 q^2)/E_2$.

Die das System 2 — bestehend aus m_2 und E_3 — erzeugende Kraft ist

$$P = (x_1 - x_2)\, E_2 = A\,(m_1 q^2 - E_1) \cos q t.$$

Nach der Formel für erzwungene Schwingungen gilt:

$$x_2 = \frac{P n^2}{E_3 (n^2 - q^2)} = \frac{A (m_1 q^2 - E_1) n^2 \cos q t}{E_3 (n^2 - q^2)}, \text{ worin } n^2 = \frac{E_3}{m_2}.$$

Durch eine Reihe von Umformungen erhält man

$$q^4 - (n_1^2 + n_2^2) q^2 + (1 - K) n_1^2 n_2^2 = 0,$$

d. h. die charakteristische Gleichung für das durch die Koppelungszahl K gekoppelte System von 2 Freiheitsgraden, dessen Einzelfrequenzen n_1 und n_2 sind.

Das letztere Prinzip wende ich hier allgemein für eine Kombination eines trägen Membransystems und einer im Anfang offenen Luftsäule von der Länge L an. Es ist hierzu notwendig die Kenntnis der Volumverrückungen am Ende der Luftsäule, wo sie an das Membransystem anstößt. Ihre Amplitude sei $V q t$. Ebenso ist die Kenntnis des Drucks an dieser Stelle notwendig, der die Schwingung des Membransystems erregen soll. Er beträgt:

$$p = \frac{x k \tan k L}{Q} V \text{ (vgl. 1. Akademieabhandl. S. 297).} \quad (42)$$

In der Konstante k ist die gesuchte Schwingungszahl q in folgender Beziehung enthalten: $\sqrt{\frac{\varrho}{\varkappa}}$ (ϱ die Dichte, $\varkappa$ der Volum-Elastizitätskoeffizient der Luft). Mit diesem Druck wird die Membran in Schwingungen versetzt. Sie bewegt sich nach der Formel:

$$\zeta = \frac{p \cos q t}{\pi \zeta} \sum \frac{\int u_s d\sigma \cdot u_s(N)}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}.$$

Das Volum der Membranausbauchung wird durch Integration über die Fläche erhalten. Es beläuft sich zu:

$$V \cos q t = \frac{p \cos q t}{\pi S} \sum \frac{(\int u_s d\sigma)^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right) (\mu_s a)^2 T_s}.$$

Man erhält so die Gleichung:

$$V \cos qt = \frac{\varkappa k \tan kL}{\pi Q S} \cdot V \cos qt \, \Sigma \frac{(\int u_s \, d\sigma)^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T_s}$$

oder:
$$\cot Lq \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}} = \frac{q \sqrt{\varkappa \varrho}}{\pi Q S} \Sigma \frac{(\int u_s \, d\sigma)^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T_s}. \qquad (43)$$

Ebenso läßt sich ein System behandeln, bei dem an die träge Membran eine im Anfang durch eine Membran oder starre Platte verschlossene Luftsäule angeschlossen ist.

Weiterhin lassen sich nach dieser Methode beliebige heterogene Systeme miteinander verknüpfen, soweit die Normalkoordinaten und Normalfunktionen anwendbar sind.

Dadurch, daß die letztere Methode auch für kombinierte Systeme anwendbar ist, bei denen das angekoppelte System an einem oder wenigen Punkten des Hauptsystems angreift, entstehen für diese Systeme neue Möglichkeiten, die Wurzelgleichung aufzustellen. Auch hierfür werden sich unten Beispiele finden. Ich habe ebenfalls die Identitäten dieser Gleichung an bestimmten rechnerischen Beispielen aufgewiesen (vgl. S. 33).

Ob die charakteristische Gleichung für ein kombiniertes System nach der ersten oder der zweiten Methode aufgestellt wird, stets lassen sich für die Bestimmung des Gleichgewichts oder der Auslösung der freien Schwingung oder der erzwungenen Schwingung des kombinierten Systems die entsprechenden allgemeinen Formeln S. 29 anwenden. Charakterisiert ist das System durch seine Schwingungszahlen. Dabei ist hervorzuheben, daß in das Φ_s der eingeprägten Kräfte nicht etwa innere Kräfte des kombinierten Systems, z. B. der elastische Zug einer Massenkette eingeht. Ich habe das letztere wiederum an dem Fall des Gleichgewichts einer Saite mit Masse und Feder in der Mitte, die durch eine Kraft aus der ungestörten Lage herausgezogen wird, aufgewiesen. Für dieses Gleichgewicht existiert ja eine äußerst einfache Formel.

Für T_s müssen stets die Massen, die unmittelbar mit dem Hauptsystem verbunden sind, berücksichtigt werden, z. B. bei dem Trommelfell die Trägheitskraft des Hammers usw.

Dynamik der Modelle des schalleitenden Apparates.

Membran kreisförmig ohne Belastung.

a = Radius der Membran, ϱ = Masse der Membran für die Flächeneinheit.

1. Die Normalfunktion. Wenn man nur zentrosymmetrische Bewegungen betrachtet, wie dies bei zentrischen Auslösungen allein notwendig ist, führt die Behandlung der Bewegungsgleichung, die für ein Element der Membran gilt, zu der Besselschen (Fourierschen) Differentialgleichung:

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu^2 w = 0, \quad \text{worin } n^2 = \frac{(\mu a)^2}{a^2}\frac{S}{\varrho}.$$

Ihre Lösung wird gegeben durch die Besselfunktion 0ter Ordnung:

$$J_0(\mu a).$$

Die Normalfunktion ist hier $u_s = J_0(\mu a)$. (44)

2. Die charakteristische Gleichung, welche die Wurzeln liefert, lautet:

$$J_0(\mu a) = 0. \tag{45}$$

3. Die Grundgrößen für die Behandlung nach dem Prinzip der Normalkoordinaten.

$$T_s = \frac{\int u_s^2\, dx}{a^2\pi} = \frac{2\pi}{a^2\pi}\int_0^a [J_0(\mu r)]^2 r\, dr = [J_1(\mu_s a)]^2. \tag{46}$$

Für die Einwirkung eines gleichmäßigen Drucks p auf die Membran ist:

$$\Phi_s = \frac{2\pi a^2 p}{(\mu_s a)^2}\int_0^{\mu a} J_0(x)\, x\, dx = \frac{2\pi a^2 p\, J_1(\mu_s a)}{\mu_s a}. \tag{47}$$

4. Statik der Membran mit Besselfunktionen ausgedrückt. Nach den allgemeinen Gleichungen wird für die Einwirkung eines über die Membran verteilten gleichmäßigen Drucks

$$w = \frac{2a^2 p}{S}\sum \frac{J_s(\mu_s r)}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}. \tag{48}$$

Für den Punkt $r = 0$ ist

$$w = \frac{2a^2 p}{S}\sum \frac{1}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}.$$

Die oben S. 15 gegebene einfache Lösung $w = \frac{p}{4S}(a^2 - r^2)$, welche die Form der ausgebauchten Membran als ein Rotationsparaboloid ergibt, muß mit dieser übereinstimmen. Entwickelt man $a^2 - r^2$ in Besselfunktionen so erhält man in der Tat

$$a^2 - r^2 = 8a^2 \sum \frac{J_0 \mu_s r}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}.$$

Als Kuriosum findet man hierbei:

$$\sum \frac{1}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)} = \frac{1}{8}.$$

5. Die freie Schwingung, die von der durch Druck ausgebauchten und dann losgelassenen Membran ausgeführt wird ist:

$$w = \frac{2a^2 p}{S} \sum \frac{J_0(\mu_s r) \cos n_s t}{(\mu_s a)^3 J_1(\mu_s a)}. \tag{48}$$

6. Ein durch einen mit der Frequenz ν harmonisch veränderlichen Druck erzwungene Schwingung wird durch die folgende Formel wiedergegeben:

$$w = \frac{2a^2 p}{S} \cos \nu t \sum \frac{J_0(\mu_s r)}{\left(1 - \frac{\nu^2}{n_s^2}\right)(\mu_3 a)^3 J_1(\mu_s a)}. \tag{49}$$

Auch für eine im Zentrum angreifende Einzelkraft läßt sich die erzwungene Schwingung ermitteln. Sie ergibt sich ohne weiteres als Grenzfall aus den Formeln für die Membran mit zentrischer Scheibe (vgl. unten S. 46).

7. An die träge Membran ist eine Luftsäule angeschlossen. Dieses Problem läßt sich mit der früher entwickelten Formel leicht behandeln, vgl. (43). Die Formel wird hier:

$$\frac{4\sqrt{\varkappa \varrho_L}\, a^4 \pi q}{QS} \sum \frac{\left[\int_0^{\mu a} J_0(x)\, x\, dx\right]^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^6 T_s} = \cot Lq \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}}.$$

Da $T_s = J_1^2(\mu_s a)$ und $\int_0^{\mu a} J_0(x)\, x\, dx = \mu a J_1(\mu a)$ ist, ergibt sich:

$$\frac{4\sqrt{\varkappa \varrho_L}\, a^4 \pi q}{QS} \sum \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^4} = \cot L q \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}}. \qquad (50)$$

Wenn die Dichte der Membran $= 0$ ist, so muß sich die in der Akademieabhandlung 1915, S. 298 für ein System, bestehend aus Luftsäule, die am Ende mit einer Membran verschlossen ist, entwickelte Formel ergeben, nämlich:

$$\tan KL = \frac{QE'}{k\varkappa}$$

(E' der Volumelastizitäts-Koeffizient der Membranausbauchung).

In der Tat reduziert sich die Beziehung, wenn man bedenkt, daß die Eigenfrequenz der Membran unendlich ist und dadurch $\frac{q^2}{n_s^2}$ verschwindet, auf: $\frac{4\sqrt{\varkappa \varrho_L}\, a^4 \pi q}{QS} \sum \frac{1}{(\mu_s a)^4}$.

Da nun $\sum \frac{1}{(\mu_s a)^4} = 1/32$ und $E' = \frac{8S}{a^4 \pi}$ ist, vgl. (S. 15), erhält man $\frac{q\sqrt{\varkappa \varrho_L}}{QE'} = \cot L q \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}}$, d. h. die frühere Formel.

Man kann aber auch eine Korrektur für eine kleine Masse der Membran in folgender Weise einführen: Die korrigierte Schwingungszahl sei $q - \delta$. Da für kleines ε: $\cot(x + \varepsilon) = \cot x + (1 + \cot^2 x)\,\varepsilon$ und ferner $\frac{1}{1 - \frac{q^2}{n_s^2}} = 1 + \frac{q^2}{n_s^2}$ ist, so ergibt sich:

$$\frac{q\sqrt{\varkappa \varrho_L}}{QE'} + \frac{32 q^3 \sqrt{\varkappa \varrho}}{QE'} \sum \frac{1}{n_s^2 (\mu_s a)^4} = \cot L q \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}} + \delta \left(1 + \frac{q^2 k \varrho}{Q^2 E'^2}\right) L \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}}.$$

Für q besteht die obige Gleichung, so daß die ersten Terme der linken und rechten Seite wegfallen. Wandelt man n_s^2 um und beachtet, daß $\sum \frac{1}{(\mu_s a)^6} = \frac{1}{192}$ ist, so ergibt sich:

$$\frac{32 a^2 q^3 \sqrt{\varkappa \varrho_L \cdot \varrho_M}}{192 S Q E'} = \delta \left(1 + \frac{q^2 k \varrho}{Q^2 E'^2}\right) L \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}}.$$

Die Korrektur ist dann:

$$\delta = \frac{a^2 q^3 \varkappa \varrho_M}{6 S E' Q L}\left(1 + \frac{q^2 \varkappa \varrho_L}{Q^2 E'^2}\right). \tag{51}$$

Auf der anderen Seite kann man die Trägheit der Membran überwiegen lassen, bzw. die Trägheit der Luft klein annehmen. Eine Wurzel der Gleichung q_s weicht dann nur wenig von der betreffenden Frequenz der Membran ab. Also $q_s = n_s - \delta_s$. Das Glied der Reihe, das diese Schwingungszahl enthält, wird

$$= \frac{n_s}{2\,\delta_s (\mu_s a)^4} \quad (\delta^2 \text{ vernachlässigt}).$$

Man sieht also, daß jeweilig für ein q_s der zugehörige Term der Reihe überwiegt, und man kann sich auf ihn beschränken. Dann kommt nach Reihenentwicklung von tangens:

$$\delta_s = \frac{2\pi L \varrho_L S}{n_s Q \varrho_M^2}. \tag{52}$$

Kreisförmige Membran mit einer zentrischen starren Scheibe.

Äußerer Radius der Membran a, Radius der Scheibe b, Verhältnis zwischen Radius der Scheibe und Radius der Membran $= \delta$, ϱ = Masse der Membran für die Flächeneinheit.

1. Die Normalfunktion u_s der Bewegungsgleichung ist die gleiche wie bei der freien Membran. Die Behandlung führt auf dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung (Fouriersche Gleichung) wie bei der freien Membran, nämlich:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu^2 w = 0; \quad n^2 = \frac{(\mu a)^2}{a^2}\frac{S}{\varrho}.$$

Die Lösung erfolgt in Besselfunktionen und zwar bei zentrosymmetrischen Einwirkungen in Funktionen 0ter Ordnung. Wegen der inneren Begrenzung müssen aber hier Besselfunktionen zweiter Art eingeführt werden. Die Lösung hat dann die Form:

$$w = \Sigma u_s = \Sigma [A_s J_0(\mu_s r) + B_s K_0(\mu_s r)].$$

Die erste Randbedingung lautet: $w = 0$ für $r = a$ und damit ist für jedes einzelne Glied der Summe:

$$u_s = A_s J_0(\mu_s a) + B_s K_0(\mu_s a) = 0.$$

Oder: $B_s = -A_s \frac{J_0(\mu_s a)}{K_s(\mu_s a)}$.

Ich bezeichne $\frac{J_0(\mu_s a)}{K_0(\mu_s a)}$ mit R.

$$u_s \text{ wird} = J_0(\mu_s r) - R K_0(\mu_s r). \tag{53}$$

Die Struktur von μ_s ist damit festgelegt. Noch nicht sind die Größen μ_s bestimmt. Sie werden aus den Wurzeln $\mu_s a$ der charakteristischen Gleichung ermittelt, die aus den inneren Randbedingungen hervorgeht (vgl. unter 3 ff.).

2. Die Grundgrößen T_s und Φ_s.

Zunächst ist wieder die Größe T_s zu berechnen:

$$T_s = \frac{\int u_s^2 \, dx}{a^2 \pi} \text{ vgl. (35)} = \frac{2\pi}{a^2 \pi} \int_b^a u_s^2(u_s r) r \, dr = \frac{2}{(\mu_s a)^2} \int_{\mu_s b}^{\mu_s a} u_s^2(x) x \, dx.$$

Das Integral läßt sich, da u_s als eine Lösung der einfachen Besselschen (Fourierschen) Differentialgleichung betrachtet werden kann, bekanntlich berechnen. Es wird zu:

$$\frac{(\mu_s a)^2}{2} [u_s'^2(a) + u_s^2(a)] - \frac{(\mu_s b)^2}{2} [u_s'^2(b) + u_s^2(b)].$$

Und da $u_s(a) = 0$ ist, vgl. oben, so wird:

$$T_s = [J_1(\mu_s a) - R K_1(\mu_s a)]^2 - \delta^2 \{[J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)]^2 + [J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)]^2\}. \tag{54}$$

Hat die Scheibe Masse $= M$, so ist dann, wenn die äußeren Kräfte auf dieses System Membran mit träger Scheibe wirken, in das T_s noch ein Betrag zuzufügen, der durch die Masse M bedingt ist. Der Zusatz zu $\varrho \int u_s^2$ wird $= \frac{M}{b^2 \pi} u_s^2(b)$. Der Anteil von T_s beträgt hiernach $\frac{\delta^2 M u_s^2(b)}{\varrho b^2 \pi}$. Dadurch wird insgesamt

$$T_s = [J_1(\mu_s a) - R K_1(\mu_s a)]^2 - \delta^2 \{[J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)]^2 + \left(1 - \frac{M}{\varrho b^2 \pi}\right) [J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)]^2. \tag{55}$$

Ferner kommt wie früher die Größe Φ_s in Betracht.

a) Eine Kraft P greift an der Scheibe an, dann ist

$$\Phi_s = [J_0(\mu_s b) - RK_0(\mu_s b)]\, P. \tag{56}$$

b) Der Druck p wirkt auf Membran und Scheibe. Dann besteht $\Phi_s = p \int u_s\, dx$ aus je einem Teil für Scheibe und Membran. Es wird:

$$\begin{aligned}\Phi_s &= p\,[u_s(\mu_s b)\, b^2 \pi + \int_b^a u_s(\mu_s r)\, 2\, r\, \pi\, dr] \\ &= a^2 \pi p\,[\delta^2 u_s(\mu_s b) + \frac{2}{(\mu_s a)^2} \int_{\mu b}^{\mu a} u_s(x)\, x\, dx] \\ &= a^2 \pi p\,\{\delta^2 [J_0(\mu_s b - RK_0(\mu_s b)] + \frac{2}{\mu_s a}\{[J_1(\mu_s a) \\ &\quad - RK_0(\mu_s a)] - \delta\,[J_1(\mu_s b) - RK_1(\mu_s b)]\}. \end{aligned} \tag{57}$$

Die Funktion in der Klammer { } bezeichne ich mit II. Dann ist $\Phi_s = a^2 \pi p\, II$. Die Beziehung gilt auch für die zusammengesetzten Systeme, die unten behandelt werden, vorausgesetzt, daß die Wurzeln $\mu_s a$ bzw. $\mu_s b$ für diese Systeme eingesetzt werden.

3. Die Scheibe ist mit Masse belegt. Die innere Randbedingung fordert, daß bei $r = b$ die obige Gleichung für das Gleichgewicht zwischen der Trägheitskraft der Scheibe und der am Rand durch die Spannung der geneigten Membran bedingten elastischen Kräfte besteht. Die Randbedingung lautet:

$$2\, b\, \pi S \frac{du_s}{dr} + Mn^2 u_s(b) = 0.$$

Daraus folgt die schon in der ersten Akademieabhandlung gegebene charakteristische Gleichung:

$$\frac{J_1(\mu b)\, K_0(\mu a) - J_0(\mu a)\, K_1(\mu b)}{J_0(\mu b)\, K_0(\mu a) - J_0(\mu a)\, K_0(\mu b)} = \frac{(\mu b)\, M}{2\, b^2 \pi \varrho}. \tag{58}$$

Die Schwingungszahlen ergeben sich aus den Wurzeln μa dieser transzendenten Gleichung durch die obige Beziehung $n^2 = \frac{(\mu a)^2}{a^2} \frac{S}{\varrho}$. Das Problem kann auch nach dem Prinzip der inneren erzwungenen Schwingungen behandelt werden, vgl. (62).

Von besonderem Interesse sind die Grenzfälle:

a) Die Scheibe ist masselos. Dann wird der Zähler der linken Seite der Gleichung $= 0$, oder:

$$J_1(\mu b)\, K_0(\mu a) - J_0(\mu a)\, K_1(\mu b) = 0. \tag{59}$$

Man kann aus der Lehre vom Zwang voraussagen, daß die Schwingungszahlen dieses Systems größer sind als die Schwingungszahlen der freien Membran ohne die Scheibe, deren Einfügung einen Zwang bedeutet.

b) Die Masse der Scheibe ist unendlich. Die Gleichung kann nur bestehen, wenn der Nenner der linken Seite $= 0$ wird. Oder die charakteristische Gleichung lautet jetzt:

$$J_0(\mu b)\, K_0(\mu a) - J_0(\mu a)\, K_0(\mu b) = 0. \tag{60}$$

Die Verhältnisse liegen hier genau so, wie wenn die Scheibe durch die unendlich große Trägheit in der 0 Lage festgehalten wird, d. h. die Gleichung gilt auch für eine ringförmige Membran (vgl. unter c). Die Schwingungszahlen liegen mit Ausnahme der Grundfrequenz, die unendlich klein ist, höher als bei der freien Membran, weil die unendlich große Masse ebenfalls wie ein Zwang wirkt (vgl. Rayleigh Sound).

c) Die Schwingungen einer zwischen zwei konzentrischen Kreisringen ausgespannten Membran. Die charakteristische Gleichung ist unter b) schon gegeben.

4. An der Scheibe greift eine Feder mit dem Elastizitätskoeffizienten $\Delta P/\Delta l = E$ an. Wenn die Scheibe Trägheit besitzt, so ergibt sich nach den allgemeinen Formeln:

$$2\pi b S \left(\frac{du_s}{dr}\right)_{r=b} = (E - Mn^2)\,(u_s)_{r=b}. \tag{61}$$

Das weitere ist aus der obigen Entwicklung unter 3 zu entnehmen.

Man kann das Problem aber auch noch anders behandeln, nach dem Prinzip der inneren erzwungenen Schwingung. Auf die Scheibe wirkt hierbei die periodische Kraft $P \cos qt$. Diese periodische Kraft wird erzeugt durch die elastische Kraft der Feder. Wenn w die Amplitude der Verrückung der Scheibe ist, dann ist $w \cdot E$ die Kraftamplitude. Und man erhält:

$$w \cos q t = \frac{w(Mn^2 - E)\cos q t}{\pi S} \Sigma \frac{[u_s(b)]^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T^s}.$$

Oder: $$\frac{\pi S}{Mn^2 - E} = \Sigma \frac{[u_s(b)]^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T_s}. \qquad (62)$$

5. Mit der Scheibe von der Masse M ist eine an Federn schwebende Masse m verbunden. Die Scheibe würde bei dem schalleitenden Apparat dem Hammer, die Masse m dem Amboß entsprechen.

Die Federn besitzen die Elastizitätskoeffizienten E_1 und E_2. Die Verrückung der Masse sei $= x$. Die Verrückung der Scheibe $= w_s$. Die Gleichungen, die nach dem Prinzip der Analyse der einfachen harmonischen Schwingungen aufgestellt werden können, sind, wenn die unbekannte Frequenz $= q$ gesetzt wird:

1. $w_s = A u_s \cos q t$,

2. $x = B \cos q t$,

3. $(x - w_s) E_1 + w_s M q^2 = -2\pi b S \frac{d w_s}{d r}$, ($w_s$ und $\frac{d w_s}{d r}$ für $r = b$ berechnet).

4. $m\ddot{x} + E_2 x + E_1(x - w_s) = 0$.

Die Gleichung 3 gibt das Gleichgewicht zwischen dem Zug der Feder 1 und dem Zug der Membran an der Scheibe an. Die Gleichung 4 ist die Bewegungsgleichung für die Masse m. Durch Einsetzen von 1 und 2 in 4 ergibt sich:

$$-mq^2 B + E_2 B + E_1(B - u_s A) = 0.$$

Daraus findet man die Beziehung zwischen den willkürlichen Konstanten:

$$B - u_s A = \frac{B(mq^2 - E_2)}{E_1} \text{ und } A = \frac{B(E_1 + E_2 - mq^2)}{u_s E_1}.$$

Die Gleichung 3 wird zunächst zu:

$$(B - u_s A) E_1 + u_s A M q^2 = -2\pi b S \left(\frac{d u_s}{d r}\right) A.$$

Durch Einsetzen der Größen der Konstanten A und B erhält man schließlich:

$$-\left(\frac{1}{u_s}\cdot\frac{du_s}{dr}\right)_{r=b}=\frac{E_1 m q^2-E_1 E_2}{2b\pi S(E_1+E_2-mq^2)}+\frac{Mq^2}{2b\pi S}.$$

Oder ausgeschrieben:

$$(\mu_s b)\cdot\frac{J_1(\mu_s b)-RK_1)\mu_s b)}{J_0(\mu_s b)-RK_0(\mu_s b)}=\frac{1}{2\pi S}\left\{\frac{E_1 m q_s^2-E_1 E_2}{E_1+E_2-mq_s^2}+Mq_s^2\right\}, \quad (63)$$

worin wie sonst $q^2=\frac{\mu_s^2 S}{\varrho}$ ist.

Die vorher behandelten Systeme, wie eine Membran mit träger Scheibe oder eine Membran mit Scheibe und Feder usw. ergeben sich ohne weiteres als Grenzfälle dieser Entwicklung.

Auch nach der Methode der inneren erzwungenen Schwingung lassen sich die Schwingungszahlen berechnen. Ich schreibe hier kurz die Formeln an: Wenn $w=P\cdot G(q^2)$ ist, worin $G(q^2)$ den Ausdruck bezeichnet:

$$\frac{1}{\pi S}\sum\frac{[u_s(b)]^2}{\left(1-\frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T_s},$$

dann ergeben sich die Schwingungszahlen aus der folgenden Gleichung:

$$mE_1 q^2 G(q^2)+mq^2-E_1 E_2 G(q^2)=E_1+E_2. \quad (64)$$

Die Berechnung ist zweifellos durch die Reihenentwicklung verwickelter als die Berechnung nach der ersten Methode.

6. An der Scheibe sind mit Federn zwei Massen aufgehängt. Sie würde dem Amboß und dem Steigbügel entsprechen, während die Scheibe dem Hammer entspricht. Die den vorigen Gleichungen entsprechenden Formeln lauten:

1. $w_s=Au_s\cos qt$, 2. $x_1=B\cos qt$, 3. $x_2=C\cos qt$,
4. $(x_1-w_s)E_{12}+w_s Mq^2=-2\pi bS\frac{dw_s}{dr}$,
5. $m_1\ddot{x}_1+E_{23}(x_1-x_2)+E_{12}(x_1-w_s)=0$,
6. $m_2\ddot{x}_2+E_3 x_2+(x_2-x_1)E_{23}=0$.

Aus Gleichung 1, 2, 3, 5 und 6 ergeben sich die willkürlichen Konstanten, wie folgt:

$$B - A u_s = C \frac{(E_{23} + E_3 - m_2 q^2) m_1 q^2 - E_{23} E_3 + E_{23} m_2 q^2}{E_{12} E_{23}},$$

$$A u_s = C \times$$

$$\frac{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23} + E_3) m_1 q^2 - (E_{12} + E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4}{E_{12} E_{23}}.$$

Die Gleichung 4 hat dieselbe Form wie die Gleichung 3 des vorhergehenden Problems, nämlich:

$$\left[\frac{(B - A u_s) E_1}{A u_s} + M q^2\right] \frac{1}{2\pi b S} = -\frac{1}{u_s} \frac{d u_s}{d r}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann:

$$(\mu_s b) \frac{J_1(\mu_s b) - R K_1(\mu_s b)}{J_0(\mu_s b) - R K_0(\mu_s b)} = \frac{1}{2\pi S} \times$$

$$\left\{\frac{[-E_{23} E_3 + (E_{23} + E_3) m_1 q^2 + E_{23} m_2 q^2 - m_1 m_2 q^4] E_{12}}{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23} + E_3) m_1 q^2 - (E_{12} + E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4} + M q^2\right\}. \quad (65)$$

Die vorher behandelten Systeme erscheinen als besondere Fälle des allgemeinen jetzt untersuchten Systems. So ergibt sich z. B. das System Membran mit Hammer und Amboß, wenn $E_{23} = 0$ ist usw.

7. Die Statik des Systems: Membran mit Scheibe durch Besselfunktionen dargestellt.

Die statische Verrückung der Membran ergibt sich dann ohne weiteres aus den allgemeinen Formeln.

a) Für eine zentrische Kraft P ist

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{u_s(b)\,(u_s(r))}{(\mu_s a)^2 T_s}. \quad (66)$$

Die Verrückung der Scheibe, d. h. der Membranpunkte $r = b$, wird wiedergegeben durch:

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{[u_s(b)]^2}{(\mu_s a)^2 T_s}.$$

Auf anderem Wege kann man ähnlich wie S. 15 zeigen, daß die Verrückung der Scheibe bei dieser Krafteinwirkung

$$= \frac{P}{2 S \pi} \operatorname{lnat}\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

ist. Dann ist zu erwarten, daß die Reihe $\Sigma = \frac{1}{2} \operatorname{lnat}\left(\frac{1}{\delta}\right)$ wird.

b) Für eine Druckwirkung p ist w der Scheibe

$$= \frac{a^2 p}{S} \Sigma \frac{H u_s(b)}{(\mu_s a)^2 T_s} \tag{67}$$

in der Klammer (vgl. oben (57)).

Die Reihe Σ müßte nach ähnlichen Überlegungen wie vorher $= \frac{1-\delta^2}{4}$ sein. Wenn keine Scheibe vorhanden ist, also $\delta = 0$ ist, geht der letzte Ausdruck in den entsprechenden für die freie Membran über vgl. (48).

8. Auslösung der Schwingungen. Es genügt, die allgemeine Gleichung nochmals hier anzuschreiben.

a) Auslösung durch eine zentrische Kraft:

$$w = \frac{P}{\pi S} \Sigma \frac{[u_s(b)]^2 \cos n_s t}{(\mu_s a)^2 T_s}. \tag{68}$$

b) Auslösung durch einen Druck:

$$w = \frac{a^2 p}{S} \Sigma \frac{H u_s(b) \cos n_s T_s}{(\mu_s a)^2 T_s}. \tag{69}$$

9. Erzwungene Schwingungen.

Ich gebe wiederum nur die Formeln an:

a) Erregung durch eine Kraft $P \cos \nu t$ an der Scheibe:

$$w = \frac{P \cos \nu t}{\pi S} \Sigma \frac{[u_s(b)]^2}{\left(1 - \frac{\nu^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T_s}. \tag{70}$$

b) Erregung durch einen allgemeinen Druck $p \cos \nu t$:

$$w = \frac{a^2 p}{S} \Sigma \frac{H u_s(b)}{\left(1 - \frac{\nu^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T_s}. \tag{71}$$

10. Mit dem System ist eine Luftsäule verbunden.

Die obige allgemeine Formel für die Verbindung eines Membransystems mit einer Luftsäule gibt unmittelbar die charakteristische Gleichung für das kombinierte System.

Die Beziehung lautet:

$$\cot L q \sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}} = \frac{\pi a^4 q \sqrt{\varkappa \varrho}}{Q S} \Sigma \frac{\Pi^2}{\left(1 - \frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s a)^2 T_s}, \quad (72)$$

wenn man berücksichtigt, daß das Integral $\int u_s \, dx$ nach (57) $= a^2 \pi \Pi$ ist.

Diese Gleichung umfaßt die Lösung für alle vorher behandelten Systeme mit angehängter Luftsäule. Also z. B. für das System Membran mit träger Scheibe oder Membran mit Scheibe und Gehörknöchelchen. Man muß nur hierzu die Wurzeln für die entsprechenden charakteristischen Gleichungen $\mu_s a$ ermitteln und in die Ausdrücke unter dem Summenzeichen eintragen. T_s ist unter Einbeziehung der Masse der Scheibe zu berechnen (vgl. S. 30).

Kreisförmige Membran mit bis zur Mitte reichendem starrem Stab (Hammer).

1. Die Normalfunktion u_s.

Das System ist nicht zentrosymmetrisch. Deshalb muß in die Differentialgleichung ebenso wie bei dem statischen Problem noch die Abhängigkeit von der zweiten räumlichen Koordinate, dem Winkel ϑ eingefügt werden. Die Behandlung der Bewegungsgleichung führt schließlich auf die Besselsche Differentialgleichung $p$ter Ordnung.

$$\frac{d^2 w_p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d w_p}{dr} + \left(\mu^2 - \frac{p^2}{r^2}\right) w_p = 0.$$

Die Lösung ergibt Besselsche Funktionen $p$ter Ordnung. p kann auch eine gebrochene Zahl usw. sein. Die Einführung von Bessel-Funktionen gebrochener Ordnung wird bei dem vorliegenden Problem notwendig. Die Grenzbedingungen lauten:

1. Für die Lage des Stabs oder $\vartheta = \pm \pi$ müssen die Verrückungen der Membran in einer geraden Linie erfolgen. Oder $w = \alpha (a - r)$. α ist der Erhebungswinkel des Stabs. Diese erste Bedingung kann nur durch Reihen von Bessel-Funktionen erfüllt werden.

2. Für $r = a$ ist $w = 0$.

Da durch die Reihe, welche die Bedingung 1 erfüllt, nicht zugleich die Bedingung 2 erfüllt werden kann, muß die Lösung

noch eine zweite Reihenentwicklung enthalten, welche die Bedingung 1 nicht stört. Dies ist nur durch eine Reihe von Bessel-Funktionen gebrochener Ordnung möglich. Dann schreibt sich die Lösung an:

$$w = \overset{\text{I}}{\sum a_p [J_p(\mu r)] \cos p\vartheta} + \overset{\text{II}}{\sum b_m [J_{m+\frac{1}{2}}(\mu r)] \cos (m + \tfrac{1}{2})\vartheta}.$$

Schließlich muß noch eine dritte analytische Festsetzung getroffen werden (vgl. oben S. 16). An der Stelle des Hammers hat nämlich die Differentialgleichung keine Geltung mehr, weil hier der Differentialquotient $\frac{\partial w}{\partial \vartheta}$ unstetig wird. Die notwendige analytische Beziehung wird hier gegeben durch das Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment, das die Membranspannung, und dem Drehmoment, das die äußeren Kräfte auf den Hammer ausüben.

Die Bedingung 1 lautet jetzt: $\sum (-1)^p a_p J_p(\mu r) = a a - a r$ in $a a$ und $a r$ müssen in Reihen von Bessel-Funktionen entwickelt werden und zwar nach verschiedener Ordnung. Die Entwicklung erfolgt nach dem Schema:

$$1 = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \text{ und } x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) J_{2n+1}(x).$$

Daraus folgt für $\vartheta = \pm \pi$:

$$a(a - r) = a \left\{ a \left[J_0(\mu r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\mu r) \right] - \frac{2r}{\mu r} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\mu r) \right\}.$$

Es ergibt sich:

$$w_I = a \left\{ a \left[J_0(\mu r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\mu r) \cos 2k\vartheta \right] + \frac{2r}{\mu r} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) J_{2k+1}(\mu r) \cos (2k+1)\vartheta \right\}.$$

Zu beachten das $+$ Zeichen vor der zweiten Reihe. Es wird notwendig durch die Beziehung $\cos (2k+1)\pi = -1$).

Die Bedingung 2 verlangt: Für $r = a$ ist $w_I + w_{II} = 0$.

Sie lautet:

$$a\left\{a\left[J_0(\mu a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\mu a)\cos 2k\vartheta\right] + \frac{2a}{\mu a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\,J_{2k+1}(\mu a)\cos(2k+1)\vartheta\right\} = -\sum_{m=0}^{\infty} b_m J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)\cos(m+\tfrac{1}{2})\vartheta\,.$$

Zur Bestimmung von b_m wird nach dem Vorgang von Fourier beiderseits mit $\cos(m+\frac{1}{2})\vartheta$ multipliziert und von $-\pi$ bis $+\pi$ integriert. Die rechte Seite der Gleichung ergibt: $-\pi b m J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)$. Wenn man die auf der linken Seite vorkommenden Integrale auswertet, so folgt:

$$b_m = -\frac{4(-1)^m a a}{(2m+1)\pi J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)} K_m(\mu a),$$

worin ist:

$$K_m = J_0(\mu a) + (2m+1)^2\left\{-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2k}(\mu a)}{(4k-1-2m)(4k+1+2m)} + \frac{2}{\mu a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)\,J_{2k+1}(\mu a)}{(4k+1-2m)(4k+3+2m)}\right\}. \tag{73}$$

Damit ist die Struktur der Normalfunktion festgelegt. Sie wird:

$$u_s = \overset{1}{J_0}(\mu_s r) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\overset{2}{J_{2k}}(\mu_s r)\cos 2k\vartheta + \frac{2}{\mu_s a}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\overset{3}{J_{2k+1}}(\mu_s r)\cos(2k+1)\vartheta - 4\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m K_m(\mu_s a)\overset{4}{J_{m+\frac{1}{2}}}(\mu_s r)}{(2m+1)\pi J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s a)}\cos(m+\tfrac{1}{2})\vartheta\,. \tag{74}$$

2. Die Grundgrößen T_s und Φ_s.

$$T_s \text{ wird hier } = \frac{1}{a^2\pi}\int_0^a\int_{-\pi}^{+\pi} u_s^2\, r\,dr\,d\vartheta\,. \tag{75}$$

Die Berechnung des Integrals ist nicht einfach. Man kann hierzu den Greenschen Satz, den Rayl Sound I, S. 322 angewendet hat, umformen und erhält:

$$\int_0^a\int_{-\pi}^{+\pi} u^2\, r\,dr\,d\vartheta = \frac{2\mu}{a}\oint\left(\frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial^2 u}{\partial u\,\partial r}\right)ds. \tag{76}$$

Die rechts stehende Integration ist über den ganzen Rand zu erstrecken, nämlich den Kreis entlang von $-\pi$ bis $+\pi$, dann den Stab hinauf und hinab. Beide Teile des Randintegrals führen wegen des verwickelten Aufbaues von u zu umständlichen Rechnungen, wenn auch eine Anzahl von Gliedern durch 0 werden ausfallen. Ich versage mir, hier die Rechnungen vor dem endgültigen Abschluß wieder zu geben. Die unmittelbare Integration, die zuerst wohl nach dem Winkel, dann nach r durchgeführt werden kann, dürfte vielleicht einfacher sein. Da es sich nicht um eine Integration in allgemeinen Ausdrücken zu handeln braucht, so erscheint auch eine graphische Integration nicht aussichtslos. Die Hauptanwendung findet die Entwicklung nach Normalkoordinaten bei dem System Membran usw. mit angehängter Luftsäule. Hier könnte wohl die Reduktion auf zwei Freiheitsgrade (vgl. unten) sehr nützlich sein.

In T_s ist noch ein Anteil vorhanden, der durch die Trägheit des Hammers bestimmt wird. Die Masse des Hammers reduziert man hierzu aus seinem Trägheitsmoment Θ auf den Mittelpunkt der Membran. Sie wird $= \Theta/a^2$. Für den Mittelpunkt ist $u_s = 1$. So ergibt sich der Zusatz für T_s zu $\frac{\Theta_H}{\varrho\, a^4 \pi}$ vgl. unten (90).

Die zweite Grundgröße Φ_s wird nach der allgemeinen Formel (vgl. S. 29) gebildet.

a) Auf die Membran wirkt ein Druck p.

$$\Phi_s = p \int_0^a \int_{-\pi}^{+\pi} u_s\, r\, dr\, d\vartheta .$$

Da $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2k\vartheta\, d\vartheta$ und $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2k+1)\vartheta\, d\vartheta = 0$ ist, so fallen aus dem Integral u_2 und u_3 vgl. (74) heraus. Dadurch wird:

$$\Phi_s = p\left\{-\frac{2\pi a^2}{\mu_s a} J_0'(\mu_s a) - \frac{8}{\pi}\int_0^a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s r)}{(2m+1)^2 J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s a)}\, r\, dr\right\}$$

$$= \frac{2a^2\pi p}{\mu_s a}\left\{J_1(\mu_s a) - \frac{4}{\pi^2(\mu_s a)}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m}{(2m+1)^2 J_{m+\frac{1}{2}}(\mu_s a)} \int_a^{\mu_s a} J_{m+\frac{1}{2}}(x)\, x\, dx\right\}.$$

Das Integral $\int J_{m+\frac{1}{2}}(x)\,x\,dx$ wird man wohl ebenso wie unten (80) am besten in Reihen auswerten. Entwickelt man hierzu die Bessel-Funktion in Form der bekannten Reihe und integriert gliedweise, so erhält man schließlich:

$$\int_0^{\mu a} x\,J_{m+\frac{1}{2}}(x)\,dx = \frac{2\,(\mu a)^3\,n!\,(2\,\mu a)^n}{(2\,n+1)!}\sqrt{\frac{\pi\,\mu a}{2}}\,N_m(\mu a),$$

worin N_m die Summe bedeutet:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2\nu}\,x^{2\nu}}{2^\nu\,\nu!\,(2\,n+3)\,(2\,n+5)\,..\,(2\,n+1+2\,\nu)\,(2\,n+5+4\,\nu)}.$$

Der Quotient dieses Integrals dividiert durch die Funktion $J_{m+\frac{1}{2}}$ ist gleich $\frac{2\,(\mu a)^2\,N_m}{R_m}$. Zu R_m vgl. (80). Man erhält

$$\Phi_s = \frac{2\,a^2\,\pi\,p}{\mu_s\,a}\left\{J_1(\mu_s a) - \frac{16\,(\mu_s a)}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K_m(\mu_s a)\,N_m(\mu_s a)}{(2\,m+1)^2\,R_m(\mu_s a)}\right\}.$$

Wenn man den Ausdruck in der Klammer { } mit $Z(\mu_s a)$ bezeichnet, so wird $\Phi_s = \frac{2\,a^2\,\pi\,p}{\mu_s\,a}\,Z(\mu_s a)$. Oder

$$\int_0^{a}\int_{\pi}^{+\pi} \mu_s\,r\,dr\,d\vartheta = \frac{2\,a^2\,\pi}{\mu_s\,a}\,Z(\mu_s a). \qquad (77)$$

b) Durch eine in der Mitte der Membran wirkende Kraft P wird der Stab herausgezogen. Arbeit wird nur an J_0 geleistet. Alle anderen Teile von u sind $= 0$, weil alle in u vorkommenden Bessel-Funktionen mit Ausnahme von J_0 für $r = 0$ zu 0 werden. J_0 selbst wird $= 1$. Also ist nach der Formel (33) $\Phi_s = P$.

3. Membran mit trägem Stab.

Zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung muß das Drehmoment, das die Spannung der Membran auf den Hammer ausübt, festgestellt werden (vgl. oben S. 48). Es ist:

$$Mom = 2\,S\int_0^{a}\frac{a-r}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\pi} dr.$$

Aus der Formel für u_s ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)_{\vartheta=\pi} = \frac{2\,a\,a}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K_m\,J_{m+\frac{1}{2}}(\mu r)}{J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)}.$$

Daraus folgt:

$$Mom = \frac{4\,a\,a}{\pi\,\mu}\,S\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K_m(\mu a)\left\{\int_0^{\mu a}\left[\frac{\mu a}{x}J_{m+\frac{1}{2}}(x) - J_{m+\frac{1}{2}}(x)\right]dx\right\}}{J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)}.$$

Wie im folgenden gezeigt wird, läßt sich das Integral in der Klammer { } durch Reihen auswerten. Selbstverständlich ebenso $J_{m+\frac{1}{2}}$. Die drei Funktionen K_m, das Integral und $J_{m+\frac{1}{2}}$ bestimmen das Moment. Ferner läßt sich der Quotient $\frac{\text{Integral}}{J_{m+\frac{1}{2}}}$ in der Form ansetzen: $4\,\mu\,a\,\frac{M_m}{R_m}$. Das Drehmoment der Spannung wird dann

$$Mom = \frac{16\,a\,a^2}{\pi}\,S\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K_m\,M_m}{R_m}. \tag{78}$$

Jetzt ist das Gleichgewicht zwischen diesem Drehmoment und dem Moment der äußeren Kräfte zu ermitteln. In dem hier behandelten Fall wird das letztere Moment allein durch die Trägheitskräfte des Hammers erzeugt mit dem Trägheitsmoment Θ. Es ist $= a\,n^2\,\Theta = \frac{a\,\mu^2\,S\,\Theta}{\varrho}$ und man erhält die charakteristische Gleichung: $\frac{16\,a\,a^2}{\pi}\,S\sum\frac{K_m\,M_m}{R_m} = \frac{a\,\mu^2\,S\,\Theta}{\varrho}$ oder:

$$\frac{16}{\pi\,(\mu a)^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K_m(\mu a)\,M_m(\mu a)}{R_m(\mu a)} = \frac{\Theta}{\varrho\,a^4}. \tag{79}$$

Ich nenne die Funktion auf der linken Seite F.

Die nähere Begründung und die Kritik der Lösung ist in der Dissertation von Küffner (Medizin. Fakultät, München 1922) gegeben. Ich entnehme ihr, daß zur vollen Lösung der Zusatz zu w von Gliedern in der Form der Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu_1}^{\mu\,\infty}J_m(\mu r)\sin m\vartheta\cos(n\,t+\varepsilon)$$

vom analytischen Standpunkt notwendig ist. Diese Glieder entsprechen den Schwingungstypen $\sim$ der in der Mitte belasteten Saite (vgl. Rayl, S. 206). Sie stören die Randbedingung für die Hammerlage nicht und tragen zu dem Moment M nichts bei. Sie fallen also bei der charakteristischen Gleichung weg, erzielen

aber die analytisch geforderte, zweifach unendliche Mannigfaltigkeit der Lösungen.

Aus der Abhandlung von Küffner gebe ich ferner eine Übersicht über die Berechnungsmethode. Die größten Schwierigkeiten bietet die Funktion K_m. Da nur eine Tabellierung der Bessel-Funktionen höherer Ordnung für ganzzahlige Argumente vorhanden ist, so muß man teilweise zu einer unmittelbaren Reihenentwicklung der Bessel-Funktionen, die in den Grundreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty}$$

enthalten sind, schreiben. Das Nähere ist in der angegebenen Abhandlung zu finden.

Auch die Funktion $J_{m+\frac{1}{2}}(\mu a)$ bzw. $J_{m+\frac{1}{2}}(x)$ ist für das vorliegende Problem am besten in Reihenform auszuwerten.

J wird dann

$$= \frac{x\, m!\, (2x)^m}{(2m+1)!\sqrt{\frac{\pi x}{2}}} R_m, \text{ worin}$$

$$R_m = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2^\nu \nu!\,(2m+3)(2m+5)\ldots(2m+1+2\nu)}. \quad (80)$$

Unbedingt notwendig wird die Reihenentwicklung für das Integral

$$\int_0^{\mu a} \left[\frac{\mu a}{x} J_{m+\frac{1}{2}}(x) - J_{m+\frac{1}{2}}(x)\right] dx.$$

Es wird zu:

$$\frac{4x^2\, m!\, (2x)^m}{(2m+1)!\sqrt{\frac{\pi x}{2}}} M_m, \text{ worin } M_m \quad (81)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2^\nu \nu!(2m+3)(2m+5)..(2m+1+2\nu)\times(2m+1+4\nu)(2m+3+4\nu)}.$$

Der Quotient aus dem Integral und der Funktion $J_{m+\frac{1}{2}}$ wird dann

$$\frac{4(\mu a)\, M_m(\mu a)}{R_m(\mu a)} \quad (82)$$

wie oben S. 52 schon angegeben. In der angegebenen Abhandlung ist das Nötige über die Konvergenz der Reihen enthalten.

4. Ausgezeichnete Punkte der Funktion $\Sigma \frac{K_m M_m}{R_m}$ (bzw. der charakteristischen Funktion).

Die ausgezeichneten Punkte sind 1. der Anfang der Funktion für $x = 0$, 2. die Unstetigkeitsstellen, an denen die Funktion $= \infty$ wird und 3. die Nullstellen. Die beiden letzteren Punkte sind von wesentlich physikalischer Bedeutung.

1. Für $x = 0$ bekommt die Funktion einen Grenzwert. Da nämlich die Funktion K_m für $x = 0$ den Wert des 0ten Gliedes $= \frac{-4}{(2n-1)(2n+3)}$, M_m den Wert $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$, R_m den Wert 1 erhält, so ergibt sich für

$$\Sigma \frac{K_m M_m}{R_m} : -4 \Sigma \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)^2}.$$

Die Reihe läßt sich in geschlossener Form summieren. Sie wird zu $-\frac{(16-\pi^2)}{64}$, vgl. Schaetz, Manuskript S. 22. Also wird

$$\left(\Sigma \frac{K_m M_m}{R_m}\right)_{x=0} : \frac{16-\pi^2}{16} = 0.383150.$$

Auch der Differentialquotient von $\Sigma \frac{KM}{R}$ läßt sich für die Stelle $x = 0$ bestimmen. Da $\frac{dK_m}{dx} = \frac{dM_m}{dx} = \frac{dR_m}{dx} = 0$ ist, so wird auch $\frac{d}{dx}\left(\frac{KM}{R}\right)_{x=0} = 0$.

2. Die Unendlichkeitsstellen sind durch das Nullwerden des Nenners, d. h. von R_m bzw. $J_{m+\frac{1}{2}}$ bedingt. Da die Bessel-Funktionen gebrochener Ordnung in endlichen Reihen dargestellt werden können, lassen sich die Gleichungen für das Nullwerden von $J_{m+\frac{1}{2}}$ leicht angeben.

Für $m = 0$ wird $J_{m+\frac{1}{2}}$ zu $J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi x/2} \cdot \sin x$. (Ich lasse den Faktor $\sqrt{\pi x/2}$ weiterhin aus.) Also $J_{\frac{1}{2}} \sim \sin x$. $\sin x$ wird 0 für $x = m\pi$, also sind Unstetigkeitsstellen für $x = \pi = 3.14159$, $x = 2\pi = 6.28319$ usw. vorhanden. Für $m = 1$ soll $J_{m+\frac{1}{2}} = J_{\frac{3}{2}} = \frac{\sin x}{x} - \cos x = 0$ werden, oder $\tan x = x$, d. h. es resultiert die bekannte transzendente Gleichung mit den Lösungen

$x = 0$, 4.4934, 7.7253 usw. vgl. Jahnke-Emde S. 3. Für $m = 2$ wird $J_{m+\frac{1}{2}} = J_{\frac{5}{2}}$ zu $\left(\frac{3}{x_2} - 1\right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x$ oder $\tan x = \frac{3x}{3 - x^2}$. Durch Ausprobieren (regula falsi) findet man $x = 5.768$. Für $m = 3$ oder $J_{m+\frac{1}{2}} = J_{\frac{7}{2}} = \left(\frac{16}{x^3} - \frac{6}{x}\right) \sin x - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right) \cos x = 0$ oder $\frac{15x - x^3}{15 - 6x^2} = \tan x$ findet man ebenso $x = 6.9874$. Alle weiteren Unstetigkeitsstellen liegen über $x = 7$.

3. Die Nullstellen lassen sich nur durch Ermittlung des ganzen Verlaufs der charakteristischen Funktion F feststellen, und durch Interpolation des Nullwertes. Sie werden, wie die Schlußzusammenstellung zeigt, gefunden zu: $x = 2.417$, 4.139, 5.222, 5.960 und 6.769.

5. Diskussion der Funktion $F = \frac{16}{\pi x^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m M_m}{R_m}$.

Die Funktion F ist mit 100 multipliziert in der Tabelle für eine Reihe von Argumenten ausgewertet.

Tabelle.

$= 0$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.4	2.417	2.5	3.0
$= \infty$	$+ 767.5$	$+ 175.2$	$+ 64.78$	$+ 22.82$	$+ 1.061$	0	$- 4.516$	$- 92.19$
$= 3.142$	3.5	4.0	4.1	4.139	4.2	4.493	4.5	5.0
$= \mp \infty$	$+ 37.95$	$+ 6.426$	$+ 1.964$	0	$- 2.820$	$\mp \infty$	$+ 678.1$	$+ 7.654$
$= 5.222$	5 5	5.768	5.8	5.9	5.960	6.0	6.283	6.5
$= 0$	$- 7.262$	$\mp \infty$	$+ 47.27$	$+ 5.79$	0	$- 4.881$	$\mp \infty$	$+ 19.85$
$= 6.769$	6.9	6.987	7.0					
$= 0$	$+ 8.132$	$\mp \infty$	$+ 96.10$					

Die Schnittpunkte dieser Funktion mit der zur Abszisse parallelen Geraden mit dem Ordinatenwert $\frac{\Theta_x}{\varrho a^4}$ stellen die Lösung der Gleichung dar. Sie geben die Schwingungszahlen durch die Beziehung $n = \frac{x}{a} \sqrt{\frac{S}{\varrho}}$ an. Die Nullpunkte und Unstetigkeitspunkte der Kurve sind physikalisch von großer Bedeutung.

Die Nullpunkte geben die Lösung für das Verhältnis $\frac{\Theta}{\varrho} = 0$ oder für die Masse des Hammers $= 0$ an. Die Unendlichkeits-

punkte geben die Lösung für das Unendlichwerden der Masse an. Der erste Nullpunkt stellt die Hauptschwingung der Membran mit eingefügtem masselosen Stab dar. Seine Größe ist ein bemerkenswertes Beispiel für das Prinzip des Zwangs. Die Einfügung des masselosen Hammers ruft keine Vermehrung der Massenwirkung hervor. Dagegen bedeutet sie einen Zwang. Die Schwingungszahl muß also gegenüber der Hauptschwingungszahl der hammerlosen Membran vergrößert sein. In der Tat ist dies der Fall. Das μa der Hauptschwingung für die einfache hammerlose Membran ist $= 2.404$, für die Membran mit masselosem Hammer 2.417. Der Zwang ist also nur verhältnismäßig klein. Nach dem von Rayleigh ausgearbeiteten Prinzip des Zwangs müssen die sämtlichen Schwingungen der Membran mit Hammer zwischen den Schwingungszahlen für die hammerfreie Membran liegen.

Membran					
frei	2.404	3.832	5.135	5.520	6.379
mit Hammer	2.417	4.139	5.222	5.960	6.769

Die Zusammenstellung der Schwingungszahlen zeigt diese wichtige Beziehung. Das Prinzip ermöglicht für die höheren Obertöne die Schätzung der Schwingungszahlen für die Hammer-Membran aus den Schwingungszahlen der hammerlosen Membran auf 2—3% genau.

Von noch größerer Bedeutung sind die Unstetigkeitspunkte. Sie geben die Schwingungszahlen für die Masse des Hammers $= \infty$ an. Eine unendliche Masse wirkt wie ein Festhalten. So stimmen die oben angegebenen Größen für μa, die diesen Punkten entsprechen, überein mit den Größen von μa für den festgehaltenen Hammer. Für das letztere System ist schon von Rayleigh ohne Bezugnahme auf das Problem des Trommelfells die Lösung gegeben worden. Die Erscheinung entspricht dem Theorem von Rayleigh, daß das Unendlichwerden einer Masse bei gekoppelten Systemen bzw. einer diskreten Masse bei kontinuierlichen Systemen dieselben Schwingungszahlen hervorruft, die ein unendlich großer Zwang bewirkt. Nur wird die Folge der gesamten Schwingungszahlen im ersteren Fall um eine Ordnung erniedrigt, im anderen erhöht. Der Grundton wird im ersten Fall unendlich, der erste Oberton wird gleich dem Grundton des Systems bei unendlich

großem Zwang. Die Wichtigkeit der Unendlichkeitsstellen liegt vor allem darin, daß die Kurve von ∞ ab außerordentlich steil abfällt, so daß selbst bei verhältnismäßig kleiner Masse des Hammers die Schwingungszahl nur wenig größer ist als bei unendlicher Masse. Wenn, wie dies von mir und Prof. Broemser gefunden worden ist, das Trägheitsmoment des Gehörknöchelchensystems $= 2.5 \times 10^{-3}$, die Dicke des Trommelfells $= 0.01$ und sein Radius $= 0.45$ cm ist, so fallen die Obertöne außerordentlich nahe hinter die Unendlichkeitsstellen. Z. B. der zweite Oberton kurz hinter $\mu a = 4.5$, etwa bei 4.493, der dritte Oberton zwischen 5.768 und 5.8. Diese Tatsache kann man unbedenklich zu einer Verallgemeinerung benutzen. Die Obertöne des wirklichen Trommelfells werden sehr nahe denjenigen liegen, die bei festgehaltenen Gehörknöchelchen erzeugt werden.

Die ganze Beziehung kann man in dem Satz zusammenfassen: Die Schwingungszahlen liegen für beliebige Massenverhältnisse von ∞ — 0 jeweilig in den Bezirken von $F = \infty$ bis $F = 0$.

6. Die Knotenlinien.

Für die Untersuchung der Knotenlinien der Membran, deren Verlauf $r = f(\vartheta)$ analytisch durch die Gleichung $w = 0$ für ein bestimmtes μa gegeben ist, kann man folgenden aus den physikalischen Verhältnissen abgeleiteten Satz aufstellen. Der Hammer kann einen Teil einer Knotenlinie für die Normalschwingungen nur dann bilden, wenn bei diesen Schwingungen keine Kraft an ihm wirkt. Und dies ist nur der Fall, wenn sich die Ausbauchungen seitlich von dem Hammer spiegelbildlich gleichen, also von der Form $\sim$ sind. Oder analytisch gesprochen bei Schwingungen, die in der Zusatzreihe $\Sigma J_m \sin m\vartheta$ gegeben sind (vgl. oben S. 52). Für die Schwingungen, deren Schwingungszahl durch die Gleichungen $F = \frac{\Theta}{\varrho a^4}$ bestimmt ist, fällt die Linie des Hammers nicht mit einer Knotenlinie zusammen. Die Knotenlinien können im allgemeinen nur durch den Drehpunkt des Hammers an der Peripherie des Kreises gehen. Einen weiteren Anhaltspunkt für die Bildung der Knotenlinien kann man durch Betrachtung des Übergangs von den Schwingungen des im Raum festgehaltenen Hammers zu dem System mit masselosem Hammer gewinnen. So kann man sich folgendes Bild machen:

Bei dem Grundton der Membran mit unendlicher Hammermasse schwingt die Membran, ohne daß eine Knotenlinie in ihr selbst vorhanden wäre, um den Hammer als Knotenlinie. In diese Linie muß die Knotenlinie des ersten Obertons des Systems mit wachsender Masse des Hammers übergehen. Sie läuft durch den Drehpunkt des Hammers, umschließt ihn um so enger, je größer seine Masse ist. Einen analytischen Anhaltspunkt kann man wohl in diesem Fall noch verhältnismäßig leicht durch Feststellung von w für den Radiusvektor $\vartheta = 0$ gewinnen. (Für einen raschen Überblick wäre μa etwas kleiner als 2.417, $r = \frac{1}{4} a$ und $\frac{3}{4} a$ zu wählen.) Auch für den zweiteu Oberton kann man den Verlauf der Knotenlinien auf Grund von ähnlichen Überlegungen skizzieren. Knotenlinien bei unendlich großer Masse des Hammers sind der Hammerradius und die Radien im Abstand $= \pm 120^0$ vom Hammer.

7. Mit dem Anfang des Hammers sind zwei an Federn aufgehängte Massen (Amboß und Steigbügel) verbunden.

Die Behandlung ist ganz analog des ähnlichen Problems für die mit zentrischer Scheibe versehene Membran (vgl. S. 43). Die Gleichungen, die das System charakterisieren, lauten:

1. $w_s = a a \cos q t$, 2. $x_1 = B \cos q t$, 3. $x_2 = C \cos q t$,

4. $(x_1 - w_s) E_{12} + \dfrac{q^2 \Theta w_s}{a^2} = \dfrac{16 w_s}{a^2} S \Sigma \dfrac{K_m M_m}{R_m}$,

5. $m_1 \ddot{x} + E_{12}(x_1 - x_2) + E_{12}(x_1 - w_s) = 0$,

6. $m_2 \ddot{x} + E_3 x_2 + (x_2 - x_1) E_{23} = 0$.

Hierin ist w_s die lineare Verrückung der Spitze des Hammergriffes. Auf diesen Punkt sind alle anderen Verrückungen und Koeffizienten bezogen (vgl. S. 21).

Aus Gleichungen 1, 2, 3, 5, 6 ergeben sich die willkürlichen Konstanten ähnlich wie früher, zu:

$$B - a a = C \frac{(E_{23} + E_3 - m_2 q^2) m_1 q^2 - E_{23} E_3 + E_{23} m_2 q^2}{E_{12} E_{23}},$$

$$a a = C \frac{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23} + E_3) m_1 q^2 - (E_{12} + E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4}{E_{12} E_{23}}.$$

Die Gleichung 4 hat die Form:

$$\frac{(B - a a) E_{12}}{a a} + \frac{q^2 \Theta}{a^2} = \frac{16}{\pi} S \Sigma \frac{K_m M_m}{R_m}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann:

$$\Sigma \frac{K_m M_m}{R_m} = \frac{\pi}{16 S} \times \tag{83}$$

$$\left\{ \frac{[-E_{23} E_3 + (E_{23}+E_3) m_1 q^2 + E_{23} m_2 q^2 - m_1 m_2 q^4] E_{12}}{E_{12} E_{23} + E_{12} E_3 + E_{23} E_3 - (E_{23}+E_3) m_1 q^2 - (E_{12}+E_{23}) m_2 q^2 + m_1 m_2 q^4} + \frac{\Theta q^2}{a^2} \right\}.$$

Die Systeme, Membran mit trägem Hammer oder Membran mit massenlosem Hammer und Feder oder Membran mit trägem Hammer und durch Federn mit dem Hammer verbundenen Amboß sind selbstverständlich Spezialfälle dieses allgemeinsten Systems.

Wenn an den Massen Θ/a^2 und m_1 Federzüge mit den Koeffizienten E_1 und E_2 angreifen, die von festen Wänden ausgehen, vgl. Fig. 2, dann ist statt $\Theta/a^2 q^2$ und $m_1 q^2 : \Theta/a^2 q^2 - E_1$ und $m_1 q^2 - E_2$ in die Gleichung einzusetzen.

8. Statik des Hammermembransystems.

a) Für eine zentrisch wirkende Kraft P, bzw. das Drehmoment $P \cdot a$. Da wie oben entwickelt für diesen Fall $\Phi_s = P$ ist, wird für das Gleichgewicht

$$w = \frac{P}{\pi S} \Sigma \frac{u_s(r, \vartheta)}{(\mu_s a)^2 T(\mu_s a)}.$$

Handelt es sich um die Erhebung des Mittelpunktes, so wird $u_s = 1$ und

$$w = \frac{P}{\pi S} \Sigma \frac{1}{(\mu_s a)^2 T(\mu_s a)}. \tag{84}$$

Diese Formel muß dasselbe ergeben, wie die mit Fourierschen Reihen gefundene Formel S. 16, wenn das System aus Membran und Hammer allein besteht bzw. die darin vorkommenden $\mu_s a$ die Lösungen der charakteristischen Gleichung (79) sind. Im übrigen gilt die Formel für alle behandelten Systeme, auch für die Systeme von Nr. 7, wenn die entsprechenden Wurzeln eingesetzt werden.

b) Einwirkung eines Drucks p. Für das Gleichgewicht ergibt sich

$$w = \frac{2 a^2 p}{S} \Sigma \frac{Z(\mu_s a) u_s(r, \vartheta)}{(\mu_s a)^3 T(\mu_s a)}. \tag{85}$$

Diese Beziehung muß ebenfalls mit der für die Statik der Hammermembran durch Fourier-Entwicklung gewonnenen übereinstimmen. Für den Mittelpunkt der Membran wird

$$w = \frac{2\,a^2\,p}{S} \sum \frac{Z(\mu_s\,a)}{(\mu_s\,a)^3\,T(\mu_s\,a)}.$$

9. Auslösung der Schwingungen. Es genügt, die Gleichung anzuschreiben:

a) Auslösung durch eine zentrische Kraft P:

$$w = \frac{P}{\pi S} \sum \frac{u_s(r,\vartheta)\cos n_s t}{(\mu_s\,a)^2\,T_s}. \tag{86}$$

b) Auslösung durch einen Druck p:

$$w = \frac{2\,a^2\,p}{S} \sum \frac{Z(\mu_s\,a)\,u_s(r,\vartheta)\cos n_s t}{(\mu_s\,a)^3\,T(\mu_s\,a)}. \tag{87}$$

10. Erzwungene Schwingungen. Ich gebe wiederum nur die Formeln an:

a) Erregung durch eine Kraft $P\cos \nu t$:

$$w = \frac{P\cos \nu t}{\pi S} \sum \frac{u_s(r,\vartheta)}{(\mu_s\,a)^2\,T_s}. \tag{88}$$

b) Erregung durch einen allgemeinen Druck:

$$w = \frac{2\,a^2\,p}{S}\cos \nu t \sum \frac{Z(\mu_s\,a)\,u_s(r,\vartheta)}{(\mu_s\,a)^3\,T(\mu_s\,a)}. \tag{89}$$

11. Hammermembran mit Gehörknöchelchen und angehängter Luftsäule. Die charakteristische Gleichung läßt sich nach der oben (43) angegebenen Formel unmittelbar anschreiben. Sie lautet:

$$\cot Lq\sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}} = \frac{4\pi a^4 q\sqrt{\varkappa\varrho_L}}{QS} \sum \frac{Z^2(\mu_s\,a)}{\left(1-\frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s\,a)^4\,T_s}. \tag{90}$$

Hierin sind ebenso wie o. S. 47 für $\mu_s\,a$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für das System Hammermembran mit Gehörknöchelchen einzusetzen und T_s muß den Zusatz enthalten, der durch das Trägheitsmoment des Hammers bedingt ist.

12. Einfluß der Luft der Paukenhöhle. Wenn die Luftsäule, die an die Hammermembran angehängt ist, im Anfang durch eine starre Wand verschlossen ist, so lautet die charakteristische Gleichung:

$$\tan Lq\sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}} = \frac{4\pi a^4 q\sqrt{\varkappa\varrho_L}}{QS} \sum \frac{Z^2(\mu_s\,a)}{\left(1-\frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s\,a)^4\,T_s}. \tag{91}$$

Wenn die Luft ohne Trägheit angenommen wird, so entwickelt sich hieraus, da tan sehr klein ist:

$$\frac{1}{E_L'} = \frac{4\,a^4\pi}{S}\,\Sigma\,\frac{Z^2\,(\mu_s\,a)}{\left(1-\frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s\,a)^4\,T_s},$$

worin E_L' den Volumelastizitäts-Koeffizienten des Luftraums bedeutet. Wenn wie bei dem Ohr außen die Luftsäule des äußeren Gehörgangs und innen sich der abgeschlossene Luftraum der Paukenhöhle befindet, so ergibt sich nun für das Gesamtsystem unter Berücksichtigung aller Teile Membran mit der ganzen Kette der Gehörknöchelchen, Luftsäule im äußeren Gehörgang und Luft der Paukenhöhle die folgende charakteristische Gleichung:

$$4\,a^4\pi\cdot q\sqrt{\varkappa\,\varrho_L}\;\frac{\tan L q\sqrt{\frac{\varrho_L}{\varkappa}} - E'Q}{\pi\,Q\,S}\;\Sigma\,\frac{Z^2\,(\mu_s\,a)}{\left(1-\frac{q^2}{n_s^2}\right)(\mu_s\,a)^4\,T_s} = 1. \tag{92}$$

Annäherungsmethoden für die Berechnung der Schwingungszahlen.

Die strenge Berechnung der Modelle des schalleitenden Apparates des Ohrs sind als Grundlage für die Durchrechnung des wirklichen Trommelfells von ausschlaggebender Bedeutung. Aber schon in der ersten Akademieabhandlung habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß Annäherungsmethoden dann notwendig werden, wenn sich die wirklichen Systeme von dem Schema der mathematischen Modelle zu weit entfernen. Denn die strenge Brechung dürfte mit den in dieser Abhandlung behandelten Systemen ihr Ende gefunden haben. Zu der angenäherten Berechnung können verschiedene Methoden benutzt werden.

1. Wenn die Abweichungen des wirklichen Systems von derjenigen des Modells nur gering sind, dann reichen vielleicht die von Rayleigh, Sound Art. 90/91 und 140 für die Saite S. 185, 186 für den Stab, S. 209 für Membranen, deren Begrenzung nur wenig von dem Kreis abweicht, vorgeschlagenen Annäherungsmethoden.

2. Für die Ermittlung der Hauptschwingung ist am vorteilhaftesten die Methode, die Rayleigh, Sound I, Art. 89 behandelt. Das System führt hierbei eine vorgeschriebene Bewegung von

einem Freiheitsgrad aus. Für sie wird die potentielle und kinetische Energie ermittelt und aus dem Satz von der lebendigen Kraft die Schwingungszahl abgeleitet. Sie führt im allgemeinen zu sehr guten Annäherungen, von denen ich in dem Abschnitt 5 einige Beispiele für Membransysteme geben werde.

3. Das Prinzip der Massenkonzentration. Ich habe in der ersten Akademieabhandlung S. 308, dann in der zweiten Abhandlung S. 147 das Nötige hierüber gesagt.

4. Für die Berechnung einer Oberschwingung ist eine Methode sehr gut anwendbar, die darin besteht, daß man die Zahl der Freiheitsgrade durch eine den Forderungen des Problems angemessene Festsetzung auf zwei Freiheitsgrade reduziert. Sie ist wohl hauptsächlich für die Verbindung eines Membransystems mit einer Luftsäule anwendbar. Die hierzu notwendige Zerlegung in zwei Einzelsysteme kann man so erhalten, daß man einmal die Masse eines charakteristischen Teils $= 0$ setzt, die Schwingungszahl hierfür bestimmt und für das zweite Einzelsystem die übrige Masse $= 0$ setzt und wieder die Schwingungszahl hierfür berechnet, z. B. bei dem System Membran mit Scheibe in der Mitte zuerst die Masse der Membran und für die Gewinnung der zweiten Einzelfrequenz die Masse der Scheibe $= 0$ setzt. Die Berechnung der beiden Frequenzen des Gesamtsystems erfolgt nach der ersten Akademieabhandlung S. 291 (4).

5. Um ein Urteil über die Leistungen dieser angenäherten Methoden zu gewinnen, teile ich die Ergebnisse einiger Berechnungen mit.

Die Hauptfrequenz einer freien Membran fällt nach der Rayleigh-Methode um 0.4 % zu hoch aus. Das System: „Membran mit zentrischer Scheibe, die Scheibe massenlos, Verhältnis der Radien der Scheibe und des äußeren Kreises $= 0.2$“ erhält durch die angenäherte Berechnung einen um 1.1 % zu hohen Wert. Für einen Membranring fällt unter denselben Verhältnissen die Frequenz 3.2 % zu hoch. Aus der Reduktion auf 2 Freiheitsgrade ergibt sich für das System: „träge Membran mit träger Scheibe in der Mitte“ die Hauptschwingung um 2 % und die Oberschwingung um 4.2 % zu hoch. Ebenso bei dem System freie träge Membran mit angeschlossener Luftsäule, Hauptschwingung 5.3 % zu hoch, Oberschwingung 13 % zu niedrig.

Die Schwingungszahlen der Ohrmodelle und des wirklichen Ohrs.

Eine wesentliche Größe für die Bewertung der Trägheitswirkung ist das Trägheitsmoment der Gehörknöchelchen für das Achsenband als Drehungsachse. Von Prof. Broemser und mir ist es zu rund 2.5×10^{-3} gmcm^2 ermittelt worden. Durch ein rechnerisches Verfahren, das einer gewissen allgemeinen Anwendung fähig ist, kann man das Verhältnis zwischen der Trägheit der Gehörknöchelchen und der Membran auf das System Scheibe mit Membran übertragen. Die Membran ist an der Umgrenzung festgelegt. Man nehme nun an, daß sie sich wie ein Konus bewegt, d. h. sich wie ein System von Stäben um die Peripherie als Achsen dreht. So erhält man „das Trägheitsmoment" der Membran folgendermaßen:

$$\Theta = \varrho_M \int_0^a 2\pi r\, dr\, (a - r)^2 = \frac{a^4 \pi \varrho_M}{6}$$

(ϱ_M = Masse der Membran für die Flächeneinheit).

Das Verhältnis der Trägheitswirkung der Gehörknöchelchen und der Trägheitswirkung des Trommelfells ist dann:

$$R = \frac{\Theta \text{ Gehörkn.}}{\Theta \text{ Trommelfell}} = \frac{6\,\Theta \text{ Gehörkn.}}{a^4 \pi \varrho_M},$$

Bei dem wirklichen Trommelfell würde dieses Verhältnis

$$R = \frac{6 \times 2.5 \times 10^{-3}}{0.45^4 \pi \times 0.01} = 13.4$$

sein. In der Formel für die Schwingungen einer Membran mit Scheibe tritt das Verhältnis $\frac{\varrho \text{ Sch.}}{\varrho_M}$ vgl. (58) auf. Man kommt zu ihm durch eine Reduktion des Trägheitsmoments der Membran auf die Peripherie der Scheibe. Man erhält so ähnlich wie vorher das Trägheitsmoment der Membran

$$= \frac{\pi \varrho_M (a - b)^3 (a + 3b)}{6}.$$

Die Reduktion auf die Peripherie erfolgt durch die Division mit dem Quadrat des „Hebels" $= (a - b)^2$. Die reduzierte Masse wird dann

$$= \frac{\pi}{6} \cdot a^2 \varrho_M (1 - \delta)(1 + 3\delta), \text{ worin } \delta = \frac{b}{a}$$

ist. Diese reduzierte Masse der Membran steht in dem Verhältnis zur Masse der Scheibe wie $1/R$ und es existiert die Beziehung:

$$\frac{\varrho_{Sch}}{\varrho_M} = \frac{R}{6} \cdot \frac{(1 - \delta)(1 + 3\delta)}{\delta^2}.$$

Wenn nun $\delta = 0.2$ ist, was eine Koppelungszahl von ungefähr 0.5 für die Verbindung Scheibe mit Membran ergibt, und wenn R aus der obigen Zahl entnommen wird, dann erhält man:

$$\frac{\varrho_{Sch}}{\varrho_M} = \frac{13.4}{6} \times \frac{0.8 \times 1.6}{0.04} = 71.3.$$

Berechnet man jetzt aus diesen Daten die zwei ersten Wurzeln der charakteristischen Gleichung für das System Membran mit Scheibe und Membran mit Stab, so kommt man in beiden Fällen zu ziemlich denselben Zahlen, nämlich

Membran mit Scheibe $\delta = 0.2$:	Für die Grundschwingung	$\mu a = 0.70$.
	Die erste Oberschwingung	„ $= 3.7$.
	Die zweite Oberschwingung	„ $= 7.8$.
Membran mit Stab:	Die Grundschwingung	„ $= 0.65$.
	Die erste Oberschwingung	„ $= 3.3$.

Ich füge noch hinzu: Für eine „Membran, frei ohne Belastung" ist die Grundfrequenz bestimmt durch . $\mu a = 2.404$.
Für Membran mit massenloser Scheibe . . „ $= 2.575$.
Für einen Membranring . . . . . „ $= 3.81$.
(Jedesmal $\delta = b/a = 0.2$.)

3. Ergebnisse der Theorie für die Physiologie der Schalleitung.

Meine Abhandlung ist in der Hauptsache der mathematischen Behandlung einiger Modelle gewidmet, die dem wirklichen Aufbau des Ohrs sehr nahe liegen. Die Annäherung ist bei dem Modell III so weit erfüllt, daß man ebenso gut mit ihm hören würde wie mit dem wirklichen. Die Mechanik des schalleitenden Apparates ist dadurch sowohl nach der statischen als nach der dynamischen Seite wesentlich weiter entwickelt, als dies bis jetzt der Fall war. Besonders muß man sich darüber wundern, daß die an sich ein-

fachere Statik gar nicht behandelt worden ist. Aus ihr allein können außerordentlich wichtige Folgerungen gezogen werden. Ich behandele zunächst das Grundproblem: Warum ist das Trommelmelfell mit den Gehörknöchelchen überhaupt vor die Labyrinthöffnung vorgelagert? Man wird geneigt sein, als alleinigen Zweck die Vergrößerung der Fläche, auf welche die Schallwellen auftreffen, gegenüber der Fläche des Labyrintheingangs anzunehmen. Das Kolbenmodell zeigt, daß in der Tat die Empfindlichkeit unter sonst gleichen Verhältnissen bei dem Menschenohr um das 20 fache gesteigert wird. Es wird sich aber zeigen, daß die Einschaltung der Gehörknöchelchenkette mit ihren nicht absolut engen Koppelungen den Schluß nicht zu einem zwingenden macht, abgesehen davon, daß die Einschaltung des Trommelfells und der Gehörknöchelchenkette einen dynamischen Nachteil durch die Vermehrung der Masse bedingt. Am sichersten kommt man zu einem Urteil, wenn man sich die jetzt noch nie aufgeworfene Frage vorlegt: Was geschieht, wenn das Trommelfell mit der Gehörknöchelchenkette weggenommen wird? Die Schallwellen treffen dann unmittelbar auf die zwei durch Membranen verschlossenen Öffnungen des Labyrinths der fenestra vestibuli (fenestra ovalis) und der fenestra cochleae (fenestra rotunda). Wirkt nun auf beide Öffnungen wie bei einer gleichmäßig auftreffenden Welle der gleiche Druck, so kann keine Bewegung der Labyrinthlymphe stattfinden. Der Satz leuchtet wohl von selbst ein. Aber eine kleine mathematische Entwicklung gibt sicherere Ergebnisse. Ein von starren Wänden begrenzter Raum sei mit einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt. Er besitzt zwei mit Membranen oder Membranen mit Platten oder Kolben mit Federn usw. verschlossene Öffnungen. Auf die eine Öffnung wirkt der Druck p_1, auf die andere der Druck p_2. Der Druck im Innern sei $= p_i$. Wenn E' der Volumelastizitäts-Koeffizient des Verschlusses ist, d. h. der Quotient aus auf den Verschluß wirkender Druckdifferenz und der Ausbauchung (bzw. Volumverrückung), dann besteht die Beziehung $p_1 - p_i = E\,V$. Ebenso $p_i - p_2 = E_2'\,V$. Eliminiert man p_i, so erhält man $p_1 - p_2 = V(E_1' + E_2')$. Wenn nun $p_1 = p_2$ ist, so ist die Volumverrückung $V = 0$, ganz unabhängig von der Größe von E_1' und E_2' und damit unabhängig von der Größe der Öffnungen und der Spannung der Membran.

Unter der Einwirkung von Schwingungen kann aber eine Bewegung der Lymphe hervorgerufen werden, wenn die zweite Offnung in den „Schallschatten“ gebracht wird. Das geschieht unter normalen Verhältnissen so, daß die Schallwellen auf das Trommelfell auftreffen, hinter dem die Luft der Paukenhöhle sich befindet. (Selbstverständlich darf aber der Volumelastizitäts-Koeffizient der Luft in der Paukenhöhle nicht so groß sein, daß der Druck durch das Trommelfell sich im wesentlichen ungeschwächt hindurch fortpflanzt.) Berechnungen des E' für die Paukenhöhle aus dem Luftvolumen der Paukenhöhle und experimentelle Bestimmungen haben dies erwiesen. Man kann schließlich die paradox klingende Behauptung aufstellen, daß die Schnecke bis in den Nasenrachenraum oder bis zur anderen entgegengesetzten Seite des Kopfes reichen müßte, damit die zweite notwendige Öffnung des Labyrinths in den Schallschatten kommt, wenn nicht der schalleitende Apparat vorgeschaltet wäre. Nun haben die Otiater beobachtet, daß nach vollständigem Verlust des Trommelfells, wenn nur der Steigbügel erhalten bleibt, das Gehör wohl geschädigt ist, aber wesentlich nur für die tiefen Töne. Wie können die Schallwellen nach dem Vorhergesagten überhaupt wirken? Hier wird man darauf aufmerksam, daß die fenestra cochleae ganz versteckt hinter einem Wulst, dem Promontorium, in einer trichterähnlichen Höhle liegt, der Fossula fenestrae cochleae. Durch diesen Vorsprung kann ein Schallschatten bedingt sein. An einem geeigneten Modell ausgeführte Experimente bestätigen diese Annahme. Wenn man eine Röhre ähnlich so bildet, wie in der Fig. 1 das Labyrinth angedeutet ist, so erhält man keine Schwingungen, wenn man die Schallwellen frei auf die durch Membranen verschlossenen Öffnungen einwirken läßt. Bringt man aber vor die eine Öffnung einen kleinen Schirm, so schwingt die in der Röhre enthaltene Flüssigkeit. Bei einer theoretischen Behandlung dieser Erscheinung wäre wohl auch auf die Reibung in dem engen Kanal zu achten. Der Schatten wird um so besser wirken, je höher die Schwingungszahl ist. Bei unendlich langsamen Schwingungen, d. h. bei einer statischen Einwirkung hat das Vorlagern eines Schirms oder dergleichen keine Wirkung. Der Schatten kommt also nur zur Geltung, wenn Bewegungen auftreten. Damit wäre die Beobachtung der Otiater erklärt. Dar-

nach ist das Trommelfell in erster Linie notwendig, um eine geordnete Zuleitung der Schalleinwirkung zu der fenestra vestibuli zu bewirken. Für die höheren Töne wird diese Zuleitung weniger wirksam (vgl. unten S. 76).

Um die weiteren statischen Verhältnisse zu übersehen, vereinfache ich die Kette der Gehörknöchelchen etwas, indem ich den Amboß ausfallen lasse. Das System besteht aus der Membran mit dem Hammer, der selbst mit dem Steigbügel durch eine elastische Verbindung von dem Koeffizienten E_{12} zusammenhängt. Der Steigbügel ist in die Wand der Paukenhöhle durch eine Verbindung von dem Koeffizienten E_2 eingefügt. Die Größe der Empfindlichkeit läßt sich unmittelbar aus der Formel (17) entnehmen. Sie ist:

$$\gamma_{(H+S)S} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_{H-Fen.ov.}} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + \dfrac{E_{12} E_2}{E_{12} + E_2}}.$$

Für eine Übersicht empfiehlt es sich, zwei extreme Typen zu behandeln. Einen bei dem E_{12} groß gegen E_2, einen anderen bei dem E_{12} klein gegen E_2 ist. Im ersteren Fall ist die Koppelung von Hammer und Steigbügel eng, im zweiten Fall lose.

1. Enge Koppelung zwischen Hammer und Steigbügel, d. h. E_{12}/E_2 groß. Das ganze verhält sich wie ein Federmanometer (vgl. erste Akademieabhandlung 1915). Die Empfindlichkeit wird nun $= \dfrac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_2}$ und, wenn zugleich η_M klein gegen E_2 ist $= \dfrac{\gamma_M \eta_M}{E_2}$. Führt man $K_{Tr} = E' \eta \gamma^2$ ein und das Verhältnis der Verrückung des Hammers zu der Volumausbauchung der Membran $\dfrac{f}{V} = \dfrac{C}{F} = \gamma E'$, so erhält man $\gamma_{(H+S)S} = \dfrac{K_{Tr} \cdot F}{C E_2}$. Hier zeigt sich der Einfluß der Größe der Trommelfellfläche F einerseits und der Koppelung des Hammers mit dem Trommelfell K_{Tr} andererseits auf die Empfindlichkeit, der S. 2 behauptet war.

2. Anders liegen die Verhältnisse, wenn E_{12} klein gegen E_2 ist. Dann wird

$$\gamma_{(H+S)S} = \frac{\gamma_M \eta_M}{\eta_M + E_{12}} \cdot \frac{E_{12}}{E_2}.$$

Ist E_{12} klein gegen η_M, dann ist

$$\gamma = \frac{\gamma_M \cdot E_{12}}{E_2} = \frac{K_{Tr} F}{C E_2} \cdot \frac{E_{12}}{\eta_M},$$

d. h. es ergibt sich nicht mehr die einfache Abhängigkeit von der Größe des Trommelfells und von der Koppelung. Außer von K_{Tr} und F hängt die Empfindlichkeit noch von E_{12}/E_2 ab. Die Formel zeigt, daß die Empfindlichkeit durch einen niederen Elastizitätskoeffizienten E_{12} gegenüber der Empfindlichkeit, die durch die Trommelfellkoppelung schon herabgesetzt ist, nochmals herabgesetzt wird.

Eine weitere Anwendung dieser Formeln kann man auf die Helmholtzsche Hypothese von der Bedeutung des schalleitenden Apparates machen. Helmholtz schreibt S. 219 „Tonempfindungen", 6. Ausgabe: „Die mechanische Aufgabe des Trommelhöhlenapparates ist also eine Bewegung von großer Amplitude und geringer Kraft, welche das Trommelfell trifft, zu verwandeln in eine von geringer Amplitude und großer Kraft, die dem Labyrinthwasser mitzuteilen ist. Es ist dies eine Aufgabe, wie sie durch vielerlei mechanische Apparate als Hebel, Flaschenzüge, Krane usw. gelöst wird. Die Art, wie dies im Trommelhöhlenapparat geschieht, ist ganz abweichend und sehr eigentümlich. Eine Hebelwirkung wird zwar auch benützt, aber nur in geringem Maße. Die Spitze des Hammerstieles, auf welche der Zug des Trommelfells zunächst einwirkt, ist allerdings etwa $1^1/_2$ mal so weit von der Drehungsachse entfernt, als die Spitze des Ambosses, welche auf den Steigbügel drückt. Der Hebelstiel bildet also den längeren Hebelarm und der Druck auf den Steigbügel wird $1^1/_2$ mal so groß sein als die Kraft, welche die Spitze des Hammerstieles eintreibt." Die allgemeine Aufgabe des Trommelhöhlenapparates ist gewiß durch den Helmholtzschen Satz nicht vollständig beschrieben. Aber auch die Wirkung eines Krafthebels ist durchaus nicht eindeutig zu erkennen. Man braucht sich nur zu überlegen, daß wenn der Angriffspunkt des Steigbügels näher an die Achse rückt, wohl die Kraftwirkung an dieser Stelle größer ist, daß zu gleicher Zeit aber auch der Ausschlag des Steigbügels verringert wird. Man wird also erwarten können, daß die Verlagerung des Steigbügelköpfchens entlang einem Hebel, der sich um das Achsenband

dreht, zu einer optimalen Wirkung bei einer bestimmten Länge dieses Hebels führt.

Die Formeln erweisen diese Vermutungen als richtig und sie geben den vollständigen Aufschluß, weil das System in allen wichtigen Punkten mit dem schalleitenden Apparat gleich ist. Alle diese Fragen spitzen sich zur Frage nach der Größe der Empfindlichkeit zu. Man hat in den obigen Formeln nur die Empfindlichkeit für die lineare Verrückung des Steigbügels festzustellen, alles was dem Trommelfell-Hammerapparat eigentümlich ist, nämlich die γ_a und η_a konstant zu lassen und den Angriffspunkt des Steigbügels an dem Hebel zu verrücken. Dazu muß man das Torsionsmoment η_a durch Division mit l^2 in einen gewöhnlichen Elastizitätskoeffizienten und die Winkel-Empfindlichkeit in eine lineare verwandeln (vgl. oben S. 23). Darnach wird:

$$\gamma_{f(H+S)S} = \frac{\gamma_{aM} l \eta_{aM}/l^2}{\eta_{aM}/l^2 + E_{H-Fen.ov.}} = \frac{\gamma_{aM}\eta_{aM}}{\eta_{aM}/l + l E_{H-Fen.ov.}}.$$

Behandelt man die beiden obigen Fälle getrennt, so ergibt sich für eine enge Koppelung zwischen Hebel und Steigbügel oder $\lim E_{12} = \infty$ folgende Formel:

$$\gamma_{f(H+S)S} = \frac{\gamma_{aM}\eta_{aM}}{\eta_{aM}/l + E_2 l}.$$

Die Maximumbedingung für γ_f lautet: $-\eta_a/l^2 + E_2 = 0$ oder $E_2 l^2 = \eta_a$. Also wirkt die Verkürzung des Hebelarms nicht unbedingt günstig, und sicher kann man jetzt sagen, daß die Verhältnisse beim menschlichen Ohr nicht so liegen, daß E_{12}/E_2 groß ist. Wenn wie bei dem zweiten Fall E_{12} klein gegen E_2 ist, dann lautet die entsprechende Formel:

$$\gamma_{f(H+S)S} = \frac{\gamma_{aM}\eta_{aM}}{\eta_{aM}/l + E_{12} l}.$$

Hier existiert ebenfalls ein Maximum der Empfindlichkeit für $E_{12} l^2 = \eta_a$. Da aber hier E_{12} verhältnismäßig klein ist, wird die optimale Länge größer ausfallen. Hier ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Verkürzung des Hebelarms gegenüber dem Hebelarm des Amboß günstig wirkt, noch geringer als bei Fall 1. Daß im äußersten Fall aber auch die Möglichkeit besteht, daß

eine Verlängerung des Hebelarms günstig wirkt, kann man aus dem Fall entnehmen, bei dem $E_{12} l^2$ klein ist gegen η_a. Dann wird

$$\gamma = \frac{\gamma_a \eta_a \cdot l}{\eta_a},$$

und eine Verlängerung des Hebelarms wirkt nur günstig. Man sieht also, daß alle diese maßgebenden Konstanten bekannt sein müssen, um einen Entscheid über die Zweckmäßigkeit des Baues des schalleitenden Apparates zu liefern, und daß die Helmholtzsche Behauptung durchaus nicht schlüssig ist. Zurückzutreten scheint mir ganz die Bedeutung der besonderen Form des Trommelfells, der Helmholtz einen großen Raum bei seinen Erörterungen gewidmet hat.

Ein drittes Problem bietet die Einschaltung einer verhältnismäßig losen Koppelung, wie sie zwischen Hammer und Steigbügel durch das Amboß-Steigbügelgelenk gegeben wird. Für die Beurteilung des Einflusses dieser losen Koppelung wird der Entscheid nicht durch die Bewertung der Empfindlichkeit allein gegeben, sondern die Schwingungszahl kommt ebenfalls in Betracht, d. h. die Güte. Ich habe die Güte das Produkt aus der Empfindlichkeit und dem Quadrat der Schwingungszahl, und zwar der Hauptschwingungszahl bei Systemen von mehreren Freiheitsgraden, genannt (vgl. oben S. 12). Für die folgenden Betrachtungen nehme ich die Membran als massenlos an bzw. durch eine Reduktion in die Masse des Hammers einbezogen. Das System besitzt so zwei Freiheitsgrade. Es bestehen dann folgende Beziehungen:

$$G = n_h^2 \gamma = \tfrac{1}{2}[n_1^2 + n_2^2 - \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 n_1^2 n_2^2 K}],$$

$$C_1 = \eta_H + E_{12}, \quad C_2 = E_{12} + E_2, \quad C_{12} = E_{12},$$

$$n_1^2 = \frac{\eta_H + E_{12}}{m_1}, \quad n_2^2 = \frac{E_{12} + E_2}{m_2}, \quad K_{tot} = \frac{E_{12}^2}{(\eta_H + E_{12})(E_{12} + E_2)}.$$

K_{tot} ist die Koppelungszahl für das ganze System. Ich behandle wiederum die zwei Fälle: 1. E_{12} groß gegen E_2 und damit K_{tot} nahezu 1. Dann wird:

$$\gamma = \frac{\gamma_M \eta_M}{E_2} \text{ (vgl. oben) und } n_h^2 = \frac{\eta_H + E_2}{m_1 + m_2}$$

und die Güte

$$G_1 = \frac{\gamma_M \eta_M}{E_2} = \frac{\eta_M + E_2}{m_1 + m_2}.$$

Wenn η_M klein gegen E_2 und wenn m_2 (des Steigbügels) klein gegen m_1 (des Hammers) ist, dann wird

$$G_1 = \frac{\gamma_M \eta_M}{m_1} = \frac{K_{Tr} F}{m_1}.$$

2. E_{12} klein. Dann ist, wenn n_2^2 groß gegen n_1^2 ist,

$$n_h^2 = n_1^2 (1 - k) = \frac{\eta_M + E_{12}}{m_1}.$$

G_2 wird

$$\frac{\gamma_M \eta_M E_{12}}{(\eta_M + E_{12}) E_2} \cdot \frac{\eta_M + E_{12}}{m_1} = \frac{\gamma_M \eta_M}{m_1} \cdot \frac{E_{12}}{E_2} = \frac{K_{Tr} \cdot F}{m_1} \cdot \frac{E_{12}}{E_2}.$$

Das Verhältnis der Güten der beiden Systeme, die sich nur durch die Größe von E_{12} unterscheiden, wird $= E_{12}/E_2$, worin E_{12} der Koeffizient für das lose gekoppelte System ist, d. h. die lose Koppelung verschlechtert die Güte. Da bei dem Vogelohr die Masse der Columella sehr klein ist, da ferner die Koppelung zwischen dem in das Trommelfell eingelassenen Schenkel der Columella und dem eigentlichen Columellastäbchen, das unmittelbar mit der Membran der fenestra vestibuli in Verbindung steht, sicher wesentlich größer ist als bei den Säugetieren, so ist die Güte des schalleitenden Apparates bei dem Vogel größer als bei den Säugetieren. Wie sich die Erhöhung der Güte bei dem Vogelohr auf die Empfindlichkeit und die Schwingungszahl verteilt, kann nur durch Versuche entschieden werden, die ich für das Ohr des Truthahns und der Gans mit Aussicht auf Erfolg in Angriff genommen habe.

Damit ist die letzte Frage dieser Reihe aufgeworfen, die Frage nach der Bedeutung des Amboß. Die Güte des schalleitenden Apparates wird zweifellos durch die Einfügung des Amboß verschlechtert. Denn es kommt eine neue Masse hinzu und außerdem wirkt die Hammer-Amboß-Gelenkverbindung mit einem kleinen E_{12}. Die Versuche, die von Broemser und mir angestellt worden sind, erweisen dies unmittelbar. Die Einfügung des Amboß kann also nur durch sekundäre Momente bedingt sein. Man könnte an die von Helmholtz behauptete Sperrwirkung denken (Helmholtz, Tonempfindungen, S. 217). Nach Helmholtz hat das Hammer-Amboßgelenk Sperrzähne, die so

wirken, „daß wenn der Hammer mit seinem Stiel nach innen gezogen wird, er den Amboß ganz fest packt und mitnimmt, umgekehrt, wenn das Trommelfell mit dem Hammer nach außen getrieben wird, braucht der Amboß nicht mitzugehen. . . . Der Steigbügel kann nicht aus dem ovalen Fenster ausgerissen werden, wenn die Luft im Gehörgang erheblich verdünnt wird. Eintreibung des Hammers, wie sie durch Verdichtung der Luft im Gehörgang entstehen könnte, ist ebenfalls ohne Gefahr, da sie durch die Spannung des trichterförmig eingezogenen Trommelfells selbst kräftig gehemmt wird". Diese Sperrvorrichtung ist aber nicht unumgänglich notwendig. Denn bei Vögeln ist diese Schutzvorrichtung nicht vorhanden. Bei meinen bisher angestellten Versuchen hat sich bis jetzt noch nicht ein Anzeichen dafür ergeben, daß die Sperrvorrichtung bei dem menschlichen Ohr wirkt. Allerdings haben wir unsere Versuche nicht unmittelbar auf diesen Punkt gerichtet.

Es bleibt zunächst nur die Annahme, daß die Einfügung des Amboß etwas mit den Trommelfellmuskeln zu tun hat. Bei den Säugetieren sind zwei Muskeln vorhanden, der tensor tympani und der Stapedius. Der eine greift unmittelbar an dem Hammer, und der andere an dem Steigbügel an. Wenn die beiden getrennt wirken sollen, muß eine lose Verbindung vorhanden sein. Sie wird durch das Einfügen des Amboß erzeugt. Ich hatte diese Meinung über die Bedeutung des Amboß schon ausgesprochen, als ich in Wiedersheim „Vergleichende Anatomie der Wirbeltiere" die Bemerkung fand, daß nur die Säugetiere einen tensor tympani besitzen. Sie besitzen aber auch keinen Amboß. Möglich ist, daß die Sperrvorrichtung eine Vergrößerung der Koppelung zwischen Hammer und Steigbügel hervorruft. Eine gewisse jedenfalls weniger ausgiebige Koppelung ist zwischen dem in das Trommelfell eingefügten ersten Schenkel der Columella und der eigentlichen Columella auch bei den Vögeln vorhanden. Ich habe in dieser Abhandlung die Wirkungsweise der beiden Muskeln nicht behandelt. Aber diese Überlegungen haben mich zu der Meinung geführt, daß sie beide Spanner sind, d. h. daß der Tensor, das Trommelfell bzw. das Achsenband (vgl. Helmholtz, „Tonempfindungen", S. 216, und der Stapedius die membrana fenestrae ovalis spannt.

Mit Prof. Broemser zusammen habe ich eine Reihe von Experimenten durchgeführt, die bis zu einem gewissen Grad die Leistung der Theorie erweisen und im einzelnen wichtiges ergeben. Wir haben nicht nur die Statik des schalleitenden Apparates gründlich untersucht, sondern auch die Eigenschwingungen festgestellt. Zunächst haben wir hierzu das tote menschliche Ohr benutzt. Wir haben Spiegel auf dem Hammerkopf, auf dem Amboßkörper, ferner auf der Steigbügelplatte und Drahtmarken an dem Steigbügel angebracht und die Exkursionen durch Einwirkungen eines Drucks oder eines Drehmoments auf den Hammer, bzw. die Größen γ und η, an dem ganzen System, z. T. auch nach Eröffnung der fenestrae rotunda, nach Lostrennung des Steigbügels von dem Amboß und nach weiterer Lostrennung des Amboß von dem Hammer gemessen. Die Auslösung der Schwingungen geschah nach dem von Petter, Broemser und mir ausgearbeiteten Verfahren. Wir können damit schließlich über alle Einzelkonstanten verfügen. Die Überarbeitung der Ergebnisse hat, wie ich schon früher bei der Experimentaluntersuchung der Registrierinstrumente gezeigt, welche ungemeine Bedeutung die mathematische Analyse als Fingerzeig für die Anstellung der Experimente hat. Die Hauptergebnisse sind bereits eindeutig. Die Koppelungszahl für die Einfügung des Hammers in das Trommelfell (K_{Tr}) ist annähernd $= 0.5$ und, wie schon oben angegeben wurde (vgl. S. 24), etwas größer als diejenige für einen Stab, der in einer ebenen gespannten Membran bis zur Mitte reicht. Die Koppelung zwischen Hammer und Amboß, ferner die Verbindungen des Hammers und des Amboß mit der festen Wand sind sehr lose. Die darnach möglichen Folgerungen für den schalleitenden Apparat sind oben angegeben.

Die Untersuchung der Statik ermöglicht mir einen Einwand gegen die Versuche am Leichenohr zu widerlegen. Es ist gelungen, eine der wichtigen statischen Konstanten, die Größe E', d. i. das Verhältnis des einwirkenden Drucks zu der Volumausbauchung der Membran, am lebenden Menschen zu bestimmen. Die Werte zeigen, daß die Elastizitätskoeffizienten des lebenden Ohrs und die Spannung nicht wesentlich von den entsprechenden Größen des toten Ohrs abweichen. Für mich war das von vornherein unwahrscheinlich, da ich bei der Untersuchung der Elastizität der

Arterien gefunden habe, daß die Elastizitätskoeffizienten der rein elastischen Organe bis zur beginnenden Fäulnis sich nicht verändern. Die Eigenschwingungszahlen des Gesamtsystems belaufen sich bei 3 Ohren auf 1110, 1092, 1340, im Mittel rund 1200/sec. für die Hauptschwingung. Der sogenannte Eigenton ist also sicher höher als der Formant des wichtigsten Vokals *a*. Man kann gewiß nicht sagen, daß Hermann mit seiner Bemerkung, Poggendorfs Annalen der Physik, Bd. 37, S. 432, recht hat. „Es läßt sich leicht zeigen, worauf ich indessen hier nicht näher eingehe, daß die Leistung des Trommelfells, jede Ton- oder Partialtonhöhe annähernd gleich gut auf das innere Ohr wirken zu lassen, mit der Resonanztheorie nur vereinbar ist, wenn man ihm einen sehr tiefen Eigenton, d. h. fast gar keine Spannung, dagegen eine ungemein starke Dämpfung zuschreibt; aber bei der enormen Empfindlichkeit des Ohres ist dies kein Einwand.“ Auch mit der Behauptung, daß die Dämpfung ungemein stark ist oder wie er sich später ausgedrückt hat, überaperiodisch ist, hat Hermann nicht recht, denn es treten immer 2 oder 3 gut ausgeprägte Schwingungen zutage. Die Dämpfungszahl D, die bei aperiodischer Bewegung $= 1$ ist, ist bei dem Ohr, dieses als ein System von einem Freiheitsgrad betrachtet, 0.3. Die Behauptung Hermanns steht im Zusammenhang mit seiner eigentümlichen Anschauung, daß durch eine überaperiodische Dämpfung bei niederer Schwingungszahl eine korrekte Aufzeichnung stattfindet. Er hat deshalb für den Phonograph auch eine solche überaperiodische Dämpfung angenommen. Ich habe nachgewiesen, daß auch für den Phonograph die Dämpfung gewiß nicht überaperiodisch ist. Wenn man aus den statischen Versuchen die Spannung des Trommelfells und die übrigen elastischen Koeffizienten berechnet, so kommt man für die Grundschwingung zu einer außerordentlich guten Übereinstimmung zwischen der gefundenen und berechneten Schwingungszahl. Abgesehen von den Elastizitätskoeffizienten muß man hierzu die Massenverhältnisse kennen. Sie sind bei dem Trommelfell selbst durch die Dicke des Trommelfells bestimmt, die etwa 0.1 mm beträgt, und das spezifische Gewicht des Trommelfells. Für die Gehörknöchelchenkette muß das Trägheitsmoment der Kette aus den Dimensionen und dem spezifischen Gewicht berechnet oder experimentell bestimmt werden. Für den letzten

Fall haben wir die Kette um einen dünnen Faden, der in der Richtung des Achsenbandes durch die Kette hindurchgezogen war, schwingen lassen, die Schwingungszahl und das Torsionsmoment des Fadens bestimmt. Aus beiden Bestimmungsmethoden hat sich ungefähr dieselbe Zahl ergeben, nämlich für das Gesamtträgheitsmoment 2.5 mg cm^2. Es ist so groß, wie wenn die ganze Masse weggenommen wäre und 12 mg oder rund 1 cg an der Spitze des Hammers befestigt werden. Merkwürdigerweise ist früher nicht einmal diese wichtige Grundzahl des schalleitenden Apparates bestimmt worden. Das Hauptergebnis dieser Bestimmung zeigt, daß die Trägheit des Trommelfells gegenüber der Gehörknöchelchenkette wesentlich zurücktritt, während in allen Betrachtungen von Helmholtz und von Hermann das Trommelfell die Hauptrolle spielt. Eine Oberschwingung tritt auf den Kurven kaum zutage. Es ist eine sehr rasche Schwingung von etwa 5000/sec. Am besten tritt eine solche Schwingung bei dem System Trommelfell mit Hammer allein hervor. Dies könnte seinen Grund darin haben, daß in diesem Fall die Grundschwingung relativ langsam ist. Wenn man in das mathematische Modell die bei dem Trommelfell wirklich festgestellten Größen einführt, so kommt man zu einem relativ sehr hohen Oberton (vgl. oben S. 64). Der Abstand zwischen dem Oberton und dem Grundton ist so groß, daß man durch Annäherungsmethoden leicht den Grundton berechnen kann, wenn man das Trommelfell eine beliebige Schwingungsform (parabolischen Charakters oder dgl.) (vgl. oben S. 61) ausführen läßt. In der Erörterung über die Leistungen des schalleitenden Apparates kann die Form des Trommelfells nicht die große Rolle spielen, die ihr Helmholtz zugeschrieben hat.

Wenn man nun das Ganze auf ein System von einem Freiheitsgrad reduziert und auf Grund der Schwingungszahl und der Dämpfung eine Resonanzkurve bildet, so tritt ein deutliches Resonanzmaximum hervor. Die Amplituden der erregten Schwingung werden bis in die Nähe des Resonanzmaximums richtig in den erzwungenen Schwingungen dargestellt. Bei dem Resonanzmaximum, das selbstverständlich bei 1200 liegt, werden die Amplituden überhöht, Schwingungen, die über diesem Resonanzmaximum liegen, werden verkleinert aufgezeichnet. In der Nähe dieses Resonanzmaximums liegt nun nach den allerdings nicht un-

bestrittenen Angaben von Max Wien das Empfindlichkeitsmaximum. M. Wien meint, daß dieses Maximum nicht ein Resonanzmaximum wäre, besonders, weil die Kurve der Empfindlichkeit von der Empfindlichkeit 0 bis zu diesem Maximum steigt und wieder auf 0 herabsinkt. Es ist selbstverständlich, daß der Verlauf der Kurve nicht von diesem Resonanzmaximum allein bedingt sein kann, aber auf der andern Seite auch klar, daß die Empfindlichkeitskurve mit der Empfindlichkeit 0 an der Grenze beginnt, bei der überhaupt eine Empfindung auftritt, nämlich bei einer Schwingungszahl von 20 in der Sekunde und daß auf der andern Seite die Kurve wieder auf 0 bei der oberen Hörgrenze herabsinkt. Es dürfte sich also um eine Vereinigung von physiologischen und physikalischen Momenten handeln. Daß die von mir bestimmte Schwingungszahl richtig ist, zeigen auch die Versuche mit erzwungenen Schwingungen. Wir haben zur gleichen Zeit einen Pfeifenton auf die von uns konstruierte akustische Kapsel und das Ohr wirken lassen. Die akustische Kapsel hat eine Eigenfrequenz von 3000. Man sieht, daß bei dem hohen Pfeifenton die Amplitude der Ohrregistrierung weit hinter der Amplitude der Registrierung mit der akustischen Kapsel zurückbleibt, d. h. wie die Theorie fordert, die Amplitude durch den schalleitenden Apparat und seine verhältnismäßig geringe Schwingungszahl herabgedrückt wird. Um schließlich die Leistungen des schalleitenden Apparates für wichtige Schalleinwirkungen zu demonstrieren, haben wir auch Vokale einwirken lassen. Die Versuche zeigen, daß wenigstens die Registrierung des *a* von keinem Registrierapparat besser erreicht wird. Man versteht jetzt auch, warum bei Defekten des Mittelohrs die hohen Töne noch fast ebensogut gehört werden wie mit dem schalleitenden Apparat. Denn der Trommelfell-Hammer-Amboßteil des schalleitenden Apparates setzt die Amplitude der Schwingungen außerordentlich herab. Nach der oben geäußerten Ansicht führt in diesem Fall die versteckte Lage des foramen rotundum zu einem genügenden Schallschatten.

Die Schwingungszahl des schalleitenden Apparates ist wahrscheinlich bei den kleineren Tieren höher. Ein Blick auf die zarten Knöchelchen des Kaninchens in dem Stereogramm zeigt die starke Massenreduktion und damit unter im übrigen gleichen Verhältnissen die höhere Schwingungszahl. Bestätigt wird diese

Vermutung durch eine Feststellung der Eigenschwingungszahl bei der Katze, die bei etwa 1600 liegt. Daß die Güte des Vogelohrs größer ist als bei den Säugetieren, habe ich durch besondere Versuche bereits nachgewiesen (vgl. S. 71). Der Gehörsinn ist zweifellos in erster Linie für die Verständigung mit den Artgenossen bestimmt. Für wen singt der Vogel im Frühling? Für die Artgenossin. Die übrige Welt ist für ihn zu dieser Zeit entrückt. Wenn beim Menschen die Schwingungszahl des Ohrs adaptiert ist an die Sprache, so zweifellos bei den Tieren auch an die eigenen Tierlaute. Und diese harmonieren bei den kleineren Tieren wieder mit der Perzeption durch das Gehörorgan, indem ihre Laute höher sind. Sie sind höher, weil ihre Stimmorgane kleiner sind und deshalb höhere Schwingungszahlen besitzen.

Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven.

Von **Heinrich Liebmann** in Heidelberg.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 3. Februar 1923.

Der Invariantentheorie wichtiger geometrisch definierter Gruppen ist in den letzten Jahren besondere Beachtung zuteil geworden. So entstand die Affingeometrie, so sind zur Inversionsgeometrie, der Geometrie der Gruppe der Bewegung, Ähnlichkeit und Transformation durch reziproke Radien wichtige Beiträge geleistet worden.[1])

Die folgende Darlegung befaßt sich mit den Inversionsinvarianten der Kurven. Zunächst wird die Integralinvariante („Inversionslänge" oder „Inversionsparameter") berechnet, die der Bogenlänge in der euklidischen Geometrie entspricht, und zwar für Räume beliebiger Dimension. In der Ebene und im R_3 ist sie leicht geometrisch zu deuten. Daran schließt die Bestimmung der Nullkurven (§ 1).

In § 2 werden die Extremalen besprochen, die aus der Forderung gewonnen werden, daß die erste Variation der „Inversionslänge" zu Null werden soll. Das Ergebnis ist besonders in der Ebene sehr einfach.

Daran schließt die Berechnung der niedrigsten Differentialinvariante, der „Inversionskrümmung" für ebene Kurven und Kurven des R_3. In der Ebene ergibt sich, daß die in § 2 bestimmten Extremalen alle konstante Inversionskrümmung besitzen, nur für eine bestimmte Auswahl von ihnen ist sie gleich Null. Die entsprechende Untersuchung im Raum führte u. a. zur

[1]) Vgl. z. B. A. Voss, Zur Theorie der reziproken Radien. Münchener Berichte 1920, S. 229—259.

Aufstellung der Bedingung dafür, daß eine Schar von ∞^1 Kugeln aus den Schmiegungskugeln einer Raumkurve besteht (§ 3).

Was die Methode betrifft, so ist zu bemerken, daß man in einfachen Fällen die Invarianten fast unmittelbar geometrisch aus der Theorie der reziproken Radien bestimmen kann. Gelegentlich ist weiter auszuholen und die Lie'sche Theorie heranzuziehen.

§ 1. Der Inversionsparameter.

1. Ebene Kurven. Bei der Inversion

$$x_1 = \frac{k^2 x}{r^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y}{r^2} \qquad (x^2 + y^2 = r^2)$$

entspricht bekanntlich dem Bogenelement ds das Bogenelement

$$ds_1 = \frac{k^2}{r^2} ds. \tag{1}$$

Bildet man ferner den Kreis

$$K(\xi, \eta, \varrho) \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - \varrho^2 = 0$$

ab, so wird ihm der Kreis $K_1(\xi_1, \eta_1, \varrho_1)$ zugeordnet, dabei ist

$$\xi_1 : \eta_1 : \varrho_1 : 1 = k^2 \xi : k^2 \eta : k^2 \varrho : N, \tag{2}$$
$$N = \xi^2 + \eta^2 - \varrho^2.$$

Betrachtet man insbesondere eine Schar von Krümmungskreisen, so daß

$$\xi = x + \varrho \cos\varphi, \quad \eta = y + \varrho \sin\varphi \tag{3}$$

die Koordinaten der Punkte der Evolute sind und die bekannte Beziehung besteht

$$d\xi = d\varrho \cos\varphi, \quad d\eta = d\varrho \sin\varphi,$$

so ergibt sich

$$d\varrho_1 = k^2 \left(\frac{d\varrho}{N} - \frac{2\varrho}{N^2} (\xi\, d\xi + \eta\, d\eta - \varrho\, d\varrho) \right)$$
$$= k^2 \frac{d\varrho}{N^2} \{(\xi - \varrho\cos\varphi)^2 + (\eta - \varrho \sin\varphi)^2\} = \frac{k^2\, d\varrho}{N^2} r^2.$$

Hieraus folgt wegen (1) und (2)

$$\frac{ds_1\, d\varrho_1}{\varrho_1^2} = \frac{ds\, d\varrho}{\varrho^2}.$$

Da diese Größe bei Bewegung und Ähnlichkeit ebenfalls invariant ist, so ist

$$(4) \qquad \int \frac{\sqrt{ds\,d\varrho}}{\varrho} = \int \left(\frac{d\varphi\,d\varrho}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} = \int \left(\frac{d\varrho}{\varrho\,d\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi = t,$$

worin $d\varphi$ den Winkel zweier Nachbarnormalen darstellt, eine Integralinvariante bei der Gruppe der Kreisverwandtschaften, die wir als „Inversionsparameter" bezeichnen können, entsprechend dem „Affinparameter".

Man kann dafür auch schreiben

$$(5) \qquad \int (x'y''' - y'x''')^{\frac{1}{2}}\,ds,$$

wobei die Akzente die Differentiation nach der Bogenlänge bedeuten.

2. Raumkurven. Für die Integralinvariante von Raumkurven liegt im Hinblick auf (5) der Ansatz nahe

$$(6) \qquad \int (\Sigma(x'y''' - y'x''')^2)^{\frac{1}{4}}\,ds.$$

Den Nachweis, daß (6) eine Invariante bei Bewegung und Ähnlichkeit ist, können wir der Einfachheit halber unterlassen, wollen in dieser Hinsicht nur betonen, daß das Integral hinsichtlich der Bogenlänge die Dimension Null besitzt. Es mag genügen, das Verhalten bei einer einzelnen Inversion zu untersuchen.

Wegen der Identitäten

$$\Sigma(x'y''' - y'x''')^2 = \Sigma(x')^2 \cdot \Sigma(x''')^2 - (\Sigma x'x''')^2,$$
$$\Sigma(x')^2 = 1, \quad \Sigma x'x'' = 0, \quad \Sigma x'x''' + \Sigma(x'')^2 = 0$$

ist $$\Sigma(x'y''' - y'x''')^2 = \Sigma(x''')^2 - (\Sigma(x'')^2)^2.$$

Die Inversion sei gegeben durch

$$x_1 = \frac{k^2 x}{r^2}, \quad y_1 = \frac{k^2 y}{r^2}, \quad z_1 = \frac{k^2 z}{r^2}.$$

Zu berechnen ist

$$\Sigma\left(\frac{d^2 x_1}{ds_1^2}\right)^2 - \left(\Sigma\left(\frac{d^2 x_1}{ds_1^2}\right)^2\right)^2,$$

wobei noch zu berücksichtigen ist (1)

$$\frac{ds_1}{ds} = k^2 r^{-2} \text{ oder } \frac{ds}{ds_1} = r^2 k^{-2},$$

$$\frac{d^2 s}{ds_1^2} = 2 r^3 r' k^{-4},$$

$$\frac{d^3 s}{ds_1^3} = 2 r^4 (3 (r')^2 + r r'') k^{-6}.$$

Man findet dann

$$\Sigma \left(\frac{d^2 x_1}{ds_1^2}\right)^2 = k^{-4} r^4 (\Sigma (x'')^2 + 4 r'' r^{-1}),$$

$$\Sigma \left(\frac{d^3 x_1}{ds_1^2}\right)^2 = k^{-8} r^8 (\Sigma (x''')^2 + 16 r^{-2} (r'')^2 + 8 r^{-1} r'' \Sigma (x'')^2)$$

und hieraus leicht

$$(7) \quad \left\{\Sigma \left(\frac{d^3 x_1}{ds_1^3}\right)^2 - \left(\Sigma \left(\frac{d^2 x_1}{ds_1^2}\right)^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}} ds_1 = \{\Sigma (x''')^2 - (\Sigma (x'')^2)^2\}^{\frac{1}{4}} ds.$$

Hierdurch ist bestätigt, daß (6) in der Tat Integralinvariante ist.

Der Bau dieser Invariante und der Gang der Rechnung zeigt, daß das entsprechende Integral im R_n ebenfalls invariant bleibt bei der konformen Gruppe.

Interessanter als diese naheliegende Verallgemeinerung ist die geometrische Deutung, die mit Hilfe der Serret-Frenetschen Formeln unter Einbeziehung vom Krümmungsradius r (nicht zu verwechseln mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) und Radius R der Schmiegungskugel sich ergibt. Man findet

$$(8) \quad (\Sigma (x' y''' - y' x''')^2)^{\frac{1}{2}} ds = \frac{\sqrt{ds\, dr}}{r} \frac{R^{\frac{1}{2}}}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

Man erhält noch engere Anpassung an (4), wenn man den Abstand $\bar{\varrho}$ des Kurvenpunktes P vom Schnittpunkt der Krümmungsachse mit der Tangentialebene der Schmiegungskugel in P einführt. $\bar{\varrho}$ geht für $R = \infty$ in den Krümmungsradius ϱ der ebenen Kurven über, und es zeigt sich, daß die Invariante (8) der Raumkurven den Wert hat

$$(8') \quad \frac{\sqrt{ds\, dr}}{r} \cdot \left(\frac{\bar{\varrho}}{r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Man könnte (8′) direkt durch geometrische Betrachtungen gewinnen, doch ist die oben gegebene rechnerische Aufstellung der Invariante (6) schließlich einfacher.

3. Die Nullkurven (Inversionsminimalkurven). Die Kurven, längs deren das Integral (5), zwischen zwei beliebigen Punkten erstreckt, den Wert Null hat, sind nach (4) leicht zu bestimmen.

Man erhält einmal die durch

$$ds = 0$$

bestimmten Minimalgeraden, und dazu noch

$$d\varrho = 0,$$

also die Kreise. (In der Affingeometrie sind die Parabeln Nullkurven.) Dies zusammen sind die einzigen in reellen Ebenen gelegenen Nullkurven.

Im R_3 erhält man aus (6) folgende Nullkurven:

Zunächst die Minimalkurven der euklidischen Geometrie. Dazu kommen als einzige reelle Nullkurven die durch

$$\begin{aligned} x'y''' - y'x''' &= 0, \\ y'z''' - z'y''' &= 0, \\ z'x''' - x'z''' &= 0 \end{aligned}$$

bestimmten, das sind die Kreise.

Die durch

$$(x'y''' - y'x''')^2 + (y'z''' - z'y''')^2 + (z'x''' - x'z''')^2 = 0$$

gegebenen imaginären Kurven lassen sich, wie hier nicht weiter ausgeführt werden soll, durch Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung bestimmen. Die ebenen Kurven unter ihnen kann man ohne Integration angeben.

Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} z &= ux + vy, \\ z' &= ux' + vy', \\ z'' &= ux'' + vy'', \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} y'z'' - z'y'' &= u(y'x'' - x'y''), \\ z'x'' - x'z'' &= v(y'x'' - x'y''), \end{aligned}$$

es ist also zu fordern

$$(x'y''' - y'x''')^2(1 + u^2 + v^2) = 0,$$

was einerseits in jeder beliebigen Ebene die Kurve liefert, oder auf der andern Seite die Forderung, daß die Ebene den imaginären Kugelkreis berührt. Die in diesen Ebenen gelegenen Kurven also, die bekanntlich in der metrischen (euklidischen) Differentialgeometrie zu langen Erörterungen geführt haben, treten in der Inversionsgeometrie als Nullkurven auf.

§ 2. Die Extremalen.

1. Die Extremalen in der Ebene und auf der Kugel. Die Kurven extremer Inversionslänge, also nach (4) die Lösungen des Variationsproblems

$$\delta \int \sqrt{\frac{d\varphi}{\varrho}\frac{d\varrho}{\varrho}} = \delta \int \left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} d\varrho = 0 \tag{9}$$

sind in der Ebene leicht zu bestimmen, wenn man sich der Koordinaten (ξ, η) der Evolutenpunkte bedient und als unabhängige Veränderliche den Krümmungsradius ϱ beibehält. Die Differentiationen seien durch Fußmarken angedeutet.

Es ist dann die Nebenbedingung zu berücksichtigen

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 - 1 = 0, \tag{10}$$

und es wird

$$\xi_2 = -\sin\varphi \cdot \varphi_1, \quad \eta_2 = \cos\varphi \cdot \varphi_1,$$

also

$$\varphi_1 = \frac{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2}{\xi_1^2 + \eta_1^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} = \frac{\eta_2}{\xi_1^2 + \eta_1^2} - \frac{2\xi_1(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2} = -\cos\varphi \cdot \varphi_1,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_1} = -\sin\varphi \cdot \varphi_1,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_2} = -\frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} = -\sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_2} = \cos\varphi.$$

Das Variationsproblem (9) mit Nebenbedingung (10) setzen wir dann in der Form an

$$\delta \int U d\varrho = 0,$$

dabei ist

$$U = 2\varrho^{-\frac{1}{2}} \varphi_1^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 - 1).$$

Mit Verwendung der Bezeichnungen

$$A = \lambda - \varrho^{-\frac{1}{2}} \varphi_1^{\frac{1}{2}}, \quad B = \varrho^{-\frac{1}{2}} \varphi_1^{-\frac{1}{2}}$$

ist dann

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_1} = A \cos\varphi, \qquad \frac{\partial U}{\partial \eta_1} = A \sin\varphi,$$
$$\frac{\partial U}{\partial \xi_2} = -B \sin\varphi, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta_2} = B \cos\varphi,$$

und die Euler'schen Gleichungen werden

$$\frac{d}{d\varrho}(A \cos\varphi) + \frac{d^2}{d\varrho^2}(B \sin\varphi) = 0,$$
$$\frac{d}{d\varrho}(A \sin\varphi) - \frac{d^2}{d\varrho^2}(B \cos\varphi) = 0.$$

Hieraus folgt

$$A_1 + 2B_1\varphi_1 + B\varphi_2 = 0,$$
$$A\varphi_1 - B_2 + B\varphi_1^2 = 0.$$

Setzt man probeweise an

$$\varphi = \varkappa \log \varrho,$$

also die natürliche (innere) Gleichung der logarithmischen Spiralen, so kommt

$$\varphi_1 = \varkappa \varrho^{-1}, \qquad \varphi_2 = -\varkappa \varrho^{-2},$$
$$A = \lambda - \varkappa^{\frac{1}{2}} \varrho^{-1}, \quad B = \varkappa^{-\frac{1}{2}},$$
$$A_1 = \lambda_1 + \varkappa^{\frac{1}{2}} \varrho^{-2}, \quad B_1 = B_2 = 0.$$

Dies in die obigen Gleichungen eingesetzt, gibt

$$A_1 + B\varphi_2 + 2B_1\varphi_1 = \lambda_1 + \varkappa^{\frac{1}{2}} \varrho^{-2} - \varkappa^{-\frac{1}{2}} \varkappa \varrho^{-2} = 0,$$
$$\varphi_1(A + B\varphi_1) - B_2 = \varphi_1(\lambda - \varkappa^{\frac{1}{2}} \varrho^{-1} + \varkappa^{-\frac{1}{2}} \varkappa \varrho^{-1}) = 0,$$

also können die Gleichungen erfüllt werden, indem man setzt:

$$\lambda_1 = \lambda = 0.$$

Alle logarithmischen Spiralen, daher auch die durch Inversion aus ihnen ableitbaren Kurven, die Isogonalen eines linearen Kreisbüschels (und seines Orthogonalbüschels), die man auch Loxodromen nennt, sind also Extremalen.

Im ganzen sind das ∞^6 Kurven, der Tatsache entsprechend, daß das Variationsproblem, wenn man wie üblich sich die Aufgabe stellte, y als Funktion von x (nicht ξ und η als Funktionen von ϱ) zu bestimmen, auf eine Differentialgleichung der sechsten Ordnung führen müßte.

Es bleibt dann noch die Aufgabe bestehen, zwei beliebige Krümmungselemente der Ebene wirklich durch eine Loxodrome zu verbinden, die diese Elemente enthält. Sodann wäre die Frage zu beantworten: Ist das Extrem ein Minimum oder ein Maximum? Geometrische Überlegungen führen auf den zweiten Fall — genau so, wie in der Affingeometrie die Extremalen (Parabeln) das Maximum der Affinlänge zwischen zwei Linienelementen liefern.

Endlich überträgt sich das Ergebnis durch Inversion sofort auf die Kugel. Die Extremalen sind auch auf der Kugel Isogonaltrajektorien eines linearen Kreisbüschels, also, wenn man das Büschel der Meridiane nimmt, eigentliche Loxodromen.

2. Das Extremalenproblem im Raum. Im R_3 erhielte man bei schematischer Behandlung des Variationsproblems

$$\delta \int (\Sigma (x' y''' - y' x''')^2)^{\frac{1}{2}}\, ds = 0 \tag{11}$$

zur Bestimmung von y und z zwei Differentialgleichungen sechster Ordnung, womit übrigens auf Grund der Erfahrungen in der Affingeometrie noch nicht gesagt ist, daß es ∞^{12} Extremalen gibt.

Wir geben hier ein Verfahren an, das auf ∞^{10} Extremalen führt und gehen von dem Ansatz aus

$$\begin{aligned} x &= u e^{K\varphi} \cos \varphi, \\ y &= u e^{K\varphi} \sin \varphi, \\ z &= v u e^{K\varphi}, \end{aligned} \tag{12}$$

u und v sollen die abhängigen Veränderlichen sein, φ die Unabhängige. Das zu variierende Integral erhält dadurch die Form

$$\int F(u, v, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)\, d\varphi.$$

Wenn dabei zufällig F von u frei ist, so lassen sich sofort Lösungen der Euler'schen Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right) + \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right) - \frac{d^3}{d\varphi^3}\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial v_1}\right) + \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v_2}\right) - \frac{d^3}{d\varphi^3}\left(\frac{\partial F}{\partial v_3}\right) = 0$$

angeben. Man braucht nur u einer beliebigen Konstanten gleich zu setzen und v gleich dem Wert v_0, der sich ergibt durch Auflösung von

$$\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Dieser Kunstgriff erfordert nun, und darin liegt seine Bedeutung, nicht die vollständige Berechnung von F — in der Tat, man darf wohl billigerweise verlangen, daß man eine Auswahl von Extremalen auch feststellen kann, ohne die kompendiöse Differentialgleichung hinzuschreiben.

Man braucht ja F nur zu berechnen unter der Voraussetzung, daß die ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten von u und v nach φ Null sind. Wenn die „gekürzte Funktion" dann von u frei ist, ist das Verfahren anwendbar.

Die Rechnung gibt bis auf einen konstanten Faktor

$$\int (\Sigma(x'y''' - y'x''')^2)^{\frac{1}{4}}\, ds = \int (1+v^2)^{\frac{1}{4}}(K^2+1+v^2K^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi,$$

also ist das Verfahren anwendbar, und zwar ist v_0 zu bestimmen aus

$$\frac{\partial F}{\partial (v^2)} \equiv \tfrac{1}{4}(1+v^2)^{-\frac{3}{4}}(K^2+1+v^2K^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\tfrac{1}{2}(1+v^2)^{\frac{1}{4}}K^2(K^2+1+v^2K^2)^{-\frac{3}{2}} = 0.$$

Man hat also nur die Gleichung

$$K^2+1+v^2K^2-2(1+v^2)K^2 = 0$$

aufzulösen und erhält

$$v_0 = \frac{\sqrt{1-K^2}}{K},$$

also die ∞^1 Extremalen

$$
\begin{aligned}
x &= ce^{K\varphi}\cos\varphi,\\
y &= ce^{K\varphi}\sin\varphi,\\
z &= c\frac{\sqrt{1-K^2}}{K}e^{K\varphi},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

das sind konische Spiralen.

Berechnet man den Winkel, unter dem diese konischen Spiralen die Erzeugenden schneiden, so findet man

$$\cos\alpha = \frac{\Sigma x x'}{(\Sigma x^2 \cdot \Sigma x'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also: Die auf Rotationskegeln gelegenen konischen Spiralen, die die Mantellinien unter dem Winkel $\pi/4$ schneiden, sind Extremalen.

Man erhält durch Anwendung der konformen Gruppe dann ∞^{10} Extremalen, nämlich auf jeder Dupinschen Cyklide die beiden Scharen von $\pi/4$-Trajektorien der Krümmungslinien.

Übrigens sind auf der Dupinschen Cyklide alle Isogonaltrajektorien Lösungen des gebundenen Variationsproblems, von dem man also ∞^2 der ∞^6 Lösungen angeben kann. Diese Cykliden sind ein Gegenstück zu den Regelflächen, von deren ∞^2 geodätischen Linien (Lösungen des gebundenen Variationsproblems) ∞^1 gerade Linien (Lösungen des freien Variationsproblems) sind.

§ 3. Die Inversionskrümmung.

1. Ebene Kurven. Um für ebene Kurven die niedrigste Differentialinvariante zu bestimmen, gehen wir davon aus, daß im Raum der Kreise $K(\xi, \eta, \varrho)$ die Gruppe sich darstellt als sechsgliedrige Untergruppe der zehngliedrigen, vermöge deren

$$d\xi^2 + d\eta^2 - d\varrho^2$$

bis auf einen Faktor invariant bleibt; diese sechsgliedrige (nichteuklidische) Gruppe ist durch die Forderung, daß

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2 - d\varrho^2}{\varrho^2} \tag{14}$$

eine Invariante ist, definiert.

Schreiben wir x, y, z für ξ, η, ϱ, so sind die infinitesimalen Transformationen

$$(15)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ -y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y},\\ &U(f)=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z},\\ &xU(f)-\frac{x^2+y^2-z^2}{2}\frac{\partial f}{\partial x},\\ &yU(f)-\frac{x^2+y^2-z^2}{2}\frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Es ist indessen zu beachten, daß mit Rücksicht auf (10) für Krümmungskreise der Ausdruck (14) zu Null wird.

Um das gleich im Ansatz zu berücksichtigen, setzen wir

$$\frac{dx}{dz}=x_1=\cos\varphi,\quad \frac{dy}{dz}=y_1=\sin\varphi$$

und haben dann z. B. bei der fünften erzeugenden Transformation

$$Z=xz,\quad X=\frac{x^2-y^2+z^2}{2},\quad Y=xy,$$

und hieraus zunächst

$$X_1=\frac{dX}{dz}-x_1\frac{dZ}{dz}=z(1-x_1^2)-yy_1,$$

$$Y_1=\frac{dY}{dz}-y_1\frac{dZ}{dz}=x_1(y-y_1z).$$

Ferner ist $$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1},$$

daher $$\Phi=\frac{x_1Y_1-y_1X_1}{x_1^2+y_1^2}=\frac{y-zy_1}{x_1^2+y_1^2}=y-z\sin\varphi,$$

und hieraus weiter

$$\Phi_1=\frac{d}{dz}(y-z\sin\varphi)-\varphi_1(x+z\cos\varphi)=-2z\cos\varphi\varphi_1-x\varphi_1,$$

$$\begin{aligned}\Phi_2&=\frac{d\Phi_1}{dz}-\varphi_2(x+z\cos\varphi)\\&=-3\cos\varphi(\varphi_1+z\varphi_2)+2z\sin\varphi\cdot\varphi_1^2-2x\varphi_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3&=\frac{d\Phi_2}{dz}-\varphi_3(x+z\cos\varphi)\\&=\sin\varphi(5\varphi_1^2+7z\varphi_1\varphi_2)+\cos\varphi(-8\varphi_2+2z\varphi_1^3-4z\varphi_3)-3x\varphi_3.\end{aligned}$$

Die drei ersten erzeugenden Transformationen, die zusammen die Gruppe der Bewegungen der Ebene ergeben, zeigen, daß die durch

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+\Phi\frac{\partial f}{\partial \varphi}+\Phi_1\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}+\Phi_2\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}+\Phi_3\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}=0$$

definierte Differentialinvariante von x, y und φ frei sein muß; die dritte (Ähnlichkeit) gibt dann noch die Forderung

$$z\frac{\partial f}{\partial z}-\varphi_1\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}-2\varphi_2\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}-3\varphi_3\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}=0,$$

also muß f eine Funktion von $z\varphi_1$, $z^2\varphi_2$, $z^3\varphi_3$ sein.[1])

Das ist von vorneherein klar, eine Invariante der viergliedrigen ebenen Gruppe Bewegung + Ähnlichkeit kann nur von

$$\varrho\frac{d\varphi}{d\varrho},\quad \varrho^2\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2},\quad \varrho^3\frac{d^3\varphi}{d\varrho^3}$$

abhängen. Die oben angegebenen Werte von Z, X, ... Φ_3 für die fünfte erzeugende Transformation ergeben dann die weitere Forderung

$$\begin{aligned}&x\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\varphi_1\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}-2\varphi_2\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}-3\varphi_3\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}\right)\\ &+\cos\varphi\left\{-2z\varphi_1\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}-3(\varphi_1+z\varphi_2)\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}+(-8\varphi_2+2z\varphi_1^3-4z\varphi_3)\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}\right\}\\ &+\sin\varphi\left\{2z\varphi_1^2\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}+(5\varphi_1^2+7z\varphi_1\varphi_2)\frac{\partial f}{\partial \varphi_3}\right\}=0.\end{aligned}\tag{16}$$

Dabei sind $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ bereits ausgelassen, da ja f sicher von x und y frei ist.

Die sechste erzeugende Transformation gibt eine genau so gebaute Gleichung, nur an Stelle von

$$\begin{aligned}&x,\ \cos\varphi,\qquad \sin\varphi,\\ &y,\ \sin\varphi,\quad -\cos\varphi.\end{aligned}$$

Man braucht also, da die erste Zeile für $f(z\varphi,\ z^2\varphi_2,\ z^3\varphi_3)$ Null ist, nur noch die zweite und dritte gleich Null zu setzen und erhält dann

---

[1]) Die Inkremente Z, X, ... Φ_3 für die trivialen Transformationen (15), 1—4 brauchen nicht ausgerechnet zu werden.

$$J = 4t - 7w^2; \tag{17}$$

dabei ist gesetzt

$$\begin{aligned} w &= u_1^{-\frac{3}{2}}(u_2 u_1^{-1} + 3), \\ t &= (u_3 + 8u_2)u_1^{-2} + u_1 + 12u_1^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1\left(= z\,\frac{d\varphi}{dz}\right) &= \varrho\,\frac{d\varphi}{d\varrho}, \\ u_2\left(= z^2\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) &= \varrho^2\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2}, \\ u_3\left(= z^3\frac{d^3\varphi}{dz^3}\right) &= \varrho^3\frac{d^3\varphi}{d\varrho^3}. \end{aligned} \tag{17'}$$

Diese Invariante (17), die in x, y, y' . . . geschrieben von der fünften Ordnung ist, wollen wir als „Inversionskrümmung“ einführen.

Die Kurven konstanter Inversionskrümmung lassen sich dann leicht angeben.

Setzt man $\varrho = a e^{K\varphi}$,

so wird $u_1 = K^{-1}$, $u_2 = -K^{-1}$, $u_3 = 2K^{-1}$,

$$r = 2K^{\frac{3}{2}}, \quad t = 6K^{-1},$$

$$J_2 = 4(K^{-1} + 6K - 7K^3).$$

Hieraus folgt: Die logarithmischen Spiralen und die aus ihnen durch die Gruppe der Kreisverwandtschaften abzuleitenden Isogonaltrajektorien linearer Kreisbüschel sind die Kurven konstanter Inversionskrümmung. In diesen Kurven haben wir oben (§ 2, 1) die Extremalen erkannt.

J wird zu Null für

$$K^2 = 1, \qquad K^2 = -\frac{1}{7}.$$

Also kommt den reellen $\pi/4$-Trajektorien und gewissen andern imaginären Trajektorien die Krümmung Null zu.

2. Die Raumkurven. Einfacher als bei ebenen Kurven wird bei Raumkurven die Bestimmung der Inversionskrümmung. Wir kennen schon eine invariante Differentialform

$$dt = \frac{\sqrt{ds\,dr}}{r}\,\frac{R^{\frac{1}{2}}}{(R^2 - r^2)^{\frac{1}{4}}}. \tag{8}$$

Außerdem aber läßt sich eine zweite sofort angeben, wenn man beachtet, daß die zehngliedrige konforme Gruppe des Raumes zugleich die zehngliedrige Gruppe der Kugeln

$$K(X, Y, Z, R) \equiv (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - R^2$$

ist, und daß dabei die quadratische Differentialform

$$\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dR^2}{R^2}$$

invariant ist, oder auch

$$d\bar{t} = \frac{dR}{R}(X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Fußmarken bedeuten die Differentiation nach R.

Insbesondere gilt für eine Schar von Schmiegungskugeln

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 - 1 = \left(\frac{r}{r'\varrho}\right)^2,$$

wobei r der Krümmungsradius, ϱ der Torsionsradius ist und der Akzent die Differentiation nach der Bogenlänge (s) der Kurve bedeutet.

Berücksichtigt man schließlich noch die bekannte Formel

$$\varrho^2 = (R^2 - r^2)\left(\frac{dr}{ds}\right)^{-2},$$

so erhält man die Invariante

$$J_3 = \frac{d\bar{t}}{dt} = \frac{r^2}{\varrho^{\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}}} \frac{dR}{dr}, \tag{18}$$

die man als „Inversionskrümmung der Raumkurven“ bezeichnen kann.

3. Inversionskrümmung von Kanalflächen. Es liegt nahe, die Berechnung der Inversionskrümmung an eine andere Betrachtung anzuschließen. Die zehngliedrige Gruppe des Elementes

$$\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dR^2}{R^2}$$

gibt nämlich als niedrigste Invariante[1])

[1]) Mit dieser Invariante beschäftigt sich eine bei der Heidelberger Akademie eingereichte Arbeit über die Liesche Cyklide.

$$J = U^{-3}(V-U)^2 + WU^{-2}, \tag{19}$$

wobei gesetzt ist

$$U = 1 - \Sigma\left(\frac{dX}{dR}\right)^2,$$

$$V = R\Sigma\frac{dX}{dR}\frac{d^2X}{dR^2}, \tag{19'}$$

$$W = R^2\Sigma\left(\frac{d^2X}{dR^2}\right)^2,$$

und es liegt nahe, diese Invariante für eine Schar von Schmiegungskugeln zu berechnen.

Man erhält

$$U = -\frac{r^2}{(r')^2\varrho^2},$$

$$V = \frac{R^2}{r\varrho}\frac{d}{dR}\left(\frac{R}{r'\varrho}\right),$$

$$W = R^2\left\{\left[\frac{d}{dR}\left(\frac{R}{r'\varrho}\right)\right]^2 + \frac{R^2}{(r')^2\varrho^4(R')^2}\right\};$$

dabei ist

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{R}{r'\varrho}\right) = -\frac{r^2}{\varrho^3(r')^2} + \frac{rR}{(r')^2\varrho^3R'}.$$

Setzt man in (19) ein, so kommt

$$J = +1. \tag{20}$$

Der Satz läßt sich umkehren:

Für eine Kugelschar

$$K(a,b,c,R) \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0,$$
$$a = a(R), \quad b = b(R), \quad c = c(R)$$

ist die durch

$$J = U^{-3}(U-V)^2 + WU^{-2},$$

$$U = 1 - \Sigma\left(\frac{da}{dR}\right)^2,$$

$$V = R\Sigma\frac{da}{dR}\frac{d^2a}{dR^2},$$

$$W = R^2\Sigma\left(\frac{d^2a}{dR^2}\right)^2.$$

definierte Invariante dann und nur dann gleich $+1$, wenn die Kugeln Schmiegungskugeln einer Raumkurve sind.

Diese Beziehung ist das Gegenstück zur Beziehung (10)

$$\left(\frac{d\xi}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\varrho}\right)^2 - 1 = 0$$

für die Krümmungskreise $K(\xi, \eta, \varrho)$ einer ebenen Kurve.

Man kann die Invariante auch so schreiben:

$$J = \frac{R^2\{(\Sigma a_1 a_2)^2 - \Sigma a_1^2 \cdot \Sigma a_2^2) + R_2^2 \Sigma a_2^2 - 2 R_1 R_2 \Sigma a_1 a_2 + R_1^2 \Sigma a_2^2\}}{(R_1^2 - \Sigma a_1^2)^3}$$

$$(21) \qquad - \frac{2 R (R_1 \Sigma a_1 a_2 - R_2 \Sigma a_1^2)}{(R_1^2 - \Sigma a_1^2)^3}.$$

Dabei deuten die Fußmarken 1 und 2 auf die erste und zweite Differentiation nach einem Parameter hin, von dem a, b, c und R abhängen.

Ist z. B. der Radius R konstant, so wird

$$J = + \frac{R^2(\Sigma a_1^2 \cdot \Sigma a_2^2 - (\Sigma a_1 a_2)^2)}{(\Sigma a_1^2)^2} = \frac{R^2}{r^2},$$

wobei r der Krümmungsradius des Mittelpunktsorts der Kugeln ist.

Insbesondere erhält man, wenn J gleich $+1$ ist, die Folgerung: Wenn alle Schmiegungskugeln einer Raumkurve denselben Radius besitzen, $R = k$, dann hat der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln konstante Krümmung

$$(r)^{-1} = k^{-1}.$$

Aus (20) und (21) lassen sich weitere geometrische Sätze ableiten.

Über konforme Abbildung von Kegelschnittpolygonen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Februar 1923.

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften (math.-phys. Klasse vom 2. November) hat Herr Schottky einen Aufsatz veröffentlicht, der sich mit der Frage beschäftigt, ob gewisse Funktionen durch Differentialgleichungen definiert werden können; zu diesen Funktionen gehören auch diejenigen, welche Polygone algebraischer Kurven (insbesondere von Kegelschnitten) auf die Halbebene ($Y > 0$) konform abbilden. An einem Beispiele, das sich auf gewisse einfache Parabel- und Hyperbel-Polygone bezieht, wird dargelegt, daß die benötigten Funktionen keiner Differentialgleichung genügen können.

Die zu diesem Resultate führenden Schlüsse sind aber nicht stichhaltig. Behandelt man nämlich das gewählte Beispiel auf Grund der von mir entwickelten allgemeinen Theorie (was Herr Schottky nicht durchführt), so kommen die bei Herrn Schottky auftretenden Glieder, die zur Verneinung der Frage führen, nicht vor, und alle scheinbaren Widersprüche lösen sich von selbst auf (vgl. unten Nr. 5 und 6).

Sollte der a. a. O. ausgesprochene Wunsch, es möchte der Beweis für die negative Antwort der Frage allgemein geführt

[1]) Es handelt sich um die beiden Abhandlungen „Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Polygon", Sitzungsberichte der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Jahrg. 1918, S. 203 und „Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon", ebenda S. 453. Diese sollen im folgenden als Abhandlung I und Abhandlung II zitiert werden.

werden, sich erfüllen, so bliebe die Tatsache bestehen, daß es eine merkwürdige Klasse von Differentialgleichungen gibt, die alle Eigenschaften besitzen, die man für das Problem der konformen Abbildung von den aufzustellenden Gleichungen nur erwarten darf.

Zum Schlusse (Nr. 11) wird noch gezeigt (was mir bei Abfassung der Abhandlung II noch nicht gelungen war), wie man die Schwarz'sche Theorie der Kreisbogenpolygone aus meinem allgemeinen Ansatze als besonderen Fall richtig erhält.

In der Abhandlung I hatte ich die im folgenden stets mit R bezeichnete Funktion als rationale Funktion behandelt, obgleich sie sich in den singulären Stellen nur verhält wie eine rationale Funktion; das mag zu Mißverständnissen Anlaß geben. Ich bin aber in Abhandlung II § 7 auf die Frage zurückgekommen und habe die Funktion R dort durch eine Differentialgleichung definiert.

1. Es möge zunächst das von Herrn Schottky konstruierte Beispiel auf Grund der von mir aufgestellten Gleichungen behandelt werden. In der Ebene der komplexen Variabeln $z = x + iy$ sei ein Polygon gegeben, dessen Seiten von Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt und von geraden Linien gebildet werden. Nach Gleichung (33) meiner Abhandlung I wird die konforme Abbildung dieses Polygons auf die obere Halbebene der Variabeln $Z = X + iY$ durch eine Differentialgleichung der Form

$$(1) \qquad \frac{d^3 z}{dZ^3} - 3R\frac{d^2 z}{dZ^2} - \left(\frac{dR}{dZ} - 2R^2\right)\frac{dz}{dZ} = 0$$

gegeben, in der $R(Z)$ eine gewisse Funktion von Z bedeutet, die reell ist auf der reellen Axe $Y = 0$ und deren Definition unten in Nr. 12 nochmals angegeben ist. Näher bestimmt wird sie durch eine von dem Schwarz'schen Ausdrucke $\{W, Z\}$ abhängige Differentialgleichung, die in § 7 der Abhandlung II aufgestellt wurde. Bezeichnen wir die Differentiation nach Z durch Striche und setzen (mit Schottky):

$$(2) \qquad p = \frac{z'}{z}, \quad q = \frac{z''}{z'}, \quad \text{also } \frac{z'''}{z'} = q' + q^2,$$

so wird jene Gleichung:

$$(3) \qquad q' + q^2 - 3Rq - R' + 2R^2 = 0.$$

Die Gleichung (1) war a. a. O. für Parabeln aufgestellt; gerade Linien sind Grenzfälle von Parabeln, so daß die Gleichung auch für unsern Fall anwendbar bleibt. Die in (2) aufgeführte Größe p kommt in (3) nicht vor, wie es nach geometrischen Überlegungen (Unabhängigkeit von der Lage der Koordinatenaxen) oder nach einem allgemeinen Satze von Schottky sein muß.

2. In der komplexen Ebene sei andererseits ein Polygon gegeben, dessen Seiten von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt und geraden Linien gebildet werden. Die Hyperbeln können nur in gerade Linien ausarten, die durch den gemeinsamen Mittelpunkt gehen. Die Hyperbeln an sich würden zunächst zu einer Gleichung dritter Ordnung führen (in der aber $z - a$ neben z', z'', z''' vorkommt, wenn a den Mittelpunkt bezeichnet); das Vorkommen der geraden Linien zwingt zur Benutzung der allgemeinen Differentialgleichung vierter Ordnung, die ich in Gleichung (13) der Abhandlung II für Kegelschnittpolygone aufgestellt habe, nämlich:

$$3\,V\cdot\Pi'\cdot z' - 8\,(V'z' - 3\,Vz'')\,\Pi = 0,$$

wo $$\Pi = \frac{1}{z'^9}\,[-9\,V^2z''' + 9\,VV'z' + (3\,VV'' - V'^2)z'].$$

Führt man die hier angeführten Differentiationen aus und setzt

$$\Pi = -\frac{9V^2}{z'^8}\,P, \text{ also } P = q' + q^2 - 3\,Rq - R' + 2\,R^2,\ R = \frac{V'}{V},$$

so daß P die linke Seite der obigen Gleichung (3) bezeichnet, so wird die Differentialgleichung:

$$3\left[\frac{z^{IV}}{z'} - \frac{z''z'''}{z'^2} - 3\,R\left(\frac{z'''}{z'} - \left(\frac{z''}{z'}\right)\right) - 3\,R'\frac{z''}{z'} - R'' + 4\,RR'\right]$$
$$+ 3\left(6\,R - 8\,\frac{z''}{z'}\right)P - 8\left(3\,R - 3\,\frac{z''}{z'}\right)P = 0, \quad \text{oder}$$

$$\frac{dP}{dZ} - 2\,RP = 0, \tag{4}$$

wo R wieder eine Funktion von Z bezeichnet, von der in Nr. 12 die wesentlichen Eigenschaften angegeben werden, und entwickelt:

$$[q'' + 2qq' - 3\,Rq' - 3\,R'q - R' + 4\,RR'] - 2\,R[q'$$
$$+ q^2 - 3\,Rq - R' + 2\,R^2] = 0. \tag{5}$$

In § 7 der Abhandlung II wurde nachgewiesen, daß diese Gleichung unabhängig von linearen Transformationen der Variabeln Z ist.

3. Wir setzen jetzt die beiden Polygone durch die Abbildung

$$z = \zeta^2 \tag{6}$$

zueinander in Beziehung, wobei wir das Hyperbelpolygon von Nr. 2 in der Ebene der komplexen Variabeln $\zeta = \xi + i\eta$ denken. Dabei entsprechen bekanntlich den Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkte ($z = 0$) der z-Ebene die geraden Linien der ζ-Ebene und den geraden Linien der z-Ebene gleichseitige Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt ($\zeta = 0$) in der Z-Ebene. Aus dem Parabelpolygon, das in Nr. 1 behandelt wurde, entsteht also (bei passender Bestimmung der vorkommenden Konstanten) das Hyperbelpolygon von Nr. 2; es muß folglich die Differentialgleichung vierter Ordnung (5) durch die Gleichung (6) auf die Differentialgleichung dritter Ordnung (3) zurückgeführt werden. Das geschieht in der Tat auf folgende Weise.

In der ζ-Ebene sei

$$\pi = \frac{\zeta'}{\zeta}, \quad \varkappa = \frac{\zeta''}{\zeta'}, \quad \text{also } \varkappa' + \varkappa^2 = \frac{\zeta'''}{\zeta},$$

dann wird:

$$p = 2\pi, \quad q = \varkappa + \pi, \text{ oder } p' = 2\pi(\varkappa - \pi), \quad \pi' = \pi(\varkappa - \pi),$$
$$q' = \varkappa' + \pi(\varkappa - \pi), \quad q'' = \varkappa'' + \pi(\varkappa^2 + \varkappa') - 3\varkappa\pi^2 + 2\pi^3.$$

Sei nun die linke Seite der Gleichung (3) mit $P(z, Z)$ bezeichnet, so wird durch Einsetzen und Entwickeln nach Potenzen von π:

$$\begin{aligned} P(z, Z) &= \varkappa' + \varkappa^2 - 3R\varkappa - R' + 2R^2 + 3\pi(\varkappa - R) \\ &= P(\zeta, Z) + 3\pi(\varkappa - R) \end{aligned} \tag{7}$$

und die linke Seite von (4) wird:

$$\frac{dP(z, Z)}{dZ} - 2RP(z, Z) = \frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} - 2R \cdot P(\zeta, Z) + 3\pi P(\zeta, z) + 3\pi^2(R - \varkappa)$$

oder, wenn wir die linke Seite kurz mit $Q(z, Z)$ bezeichnen (so daß $Q(z, Z) = 0$ die Differentialgleichung für die Abbildung eines in der z-Ebene gelegenen Kegelschnittpolygons ist):

$$Q(\zeta, Z) = Q(z, Z) - 3\pi P(\zeta, z) - 3\pi^2(R - \varkappa),$$

oder wegen (7)

$$Q(\zeta, Z) = Q(z, Z) - 3\pi P(z, Z)$$

oder entwickelt, indem sich das Glied mit π^2 heraushebt:

$$(8) \quad \frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} - 2R \cdot P(\zeta, Z) = \frac{dP(z, Z)}{dZ} - (2R + 3\pi) P(z, Z).$$

Wenn die Gleichung $P(z, Z) = 0$ erfüllt ist, so ist also auch die Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$ erfüllt; umgekehrt sind für das Problem der konformen Abbildung des Hyperbelpolygons nur diejenigen Lösungen der Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$ brauchbar, die auch der Gleichung $P(z, Z) = 0$ genügen. Bei Benutzung der Variabeln ζ sind diese brauchbaren Lösungen nicht auszuscheiden; durch Einführung von z mittels (6) gelingt aber die Ausscheidung.[1])

4. Behandelt man aber das Hyperbelpolygon der ζ-Ebene mit der aus $P(z, Z) = 0$ durch (6) erhaltenen Gleichung $P(\zeta, Z) = 0$, so muß zufolge (7) die Gleichung

$$(9) \quad P(\zeta, Z) + 3\pi(\varkappa - R) = 0$$

auch für das Problem dieser Abbildung, d. h. für die Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$ eine Bedeutung haben. Diese ergibt sich durch Differentiation von (9) nach Z, wodurch entsteht:

$$\frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} + 3\pi(\varkappa - \pi)(\varkappa - R) + 3\pi(\varkappa' - R') = 0;$$

und indem man π hieraus mittels (9) eliminiert, findet man:

$$3(\varkappa - R)\frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} - P^2 - 3(\varkappa - R)P\varkappa - 3(\varkappa' - R')P = 0,$$

oder, wenn wir $6RP(\zeta, Z) \cdot (\varkappa - R)$ addieren und subtrahieren:

$$3(\varkappa - R)Q(\zeta, Z) - 4P^2 = 0.$$

Die Gleichung $P(\zeta, Z) = 0$ ist folglich ein partikuläres erstes Integral der Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$; man er-

[1]) Die Gleichung $Q = 0$ ist also reduktibel in dem von Frobenius eingeführten Sinne, der diesen Begriff bei linearen Differentialgleichungen näher erörtert hat: Crelle's Journal, Bd. 76, 1873.

hält statt dessen ein allgemeines erstes Integral (mit einer willkürlichen Konstanten γ), wenn man statt (6) die Transformation

$$z = (\zeta - \gamma)^2$$

anwendet; dabei bleibt $\varkappa$ ungeändert und π wird durch $\frac{z'}{z-\gamma}$ zu ersetzen sein; das Integral ist also ausgeschrieben:

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'} - 3R\frac{\zeta''}{\zeta'} + 2R^2 - R' + 3\frac{\zeta'}{\zeta-\gamma}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'} - R\right) = 0,$$

wobei γ eine willkürliche Konstante bezeichnet.

Ebenso liefert die Gleichung $\varkappa - R = 0$ ein partikuläres Integral der Gleichung $P(\zeta, Z) = 0$, nämlich dasjenige, welches zur Anwendung kommt, wenn alle Parabeln in gerade Linien ausarten. Es ist folglich (da $q = \varkappa + \pi$, $p = 2\pi$) auch

$$z'' - \frac{1}{2}\frac{z'}{z-C} = R \tag{10}$$

ein erstes Integral der Gleichung $P(z, Z) = 0$ mit einer willkürlichen Konstanten, wie schon in Gleichung (35) der Abhandlung I festgestellt wurde.

5. Bei der Transformation der einen Abbildungsaufgabe in die andere konstruiert nun Herr Schottky für obiges Beispiel einen Widerspruch und kommt dadurch zu dem Schlusse, daß die Abbildungsfunktionen überhaupt nicht durch Differentialgleichungen definiert werden können (ausgenommen die elementaren Fälle der geradlinigen und der Kreisbogen-Polygone). Seine Schlußweise ist im wesentlichen die folgende:

Nachdem gezeigt ist, daß eine algebraische Diffentialgleichung der verlangten Art z nicht enthalten darf und in den Größen z', z'', z''' . . . homogen sein müßte, wird der Einfluß der Transformation (6) auf die als existierend vorausgesetzte Gleichung untersucht. Dabei wird davon ausgegangen, daß die beiden zu vergleichenden Gleichungen (also $P = 0$ für das Parabelpolygon, $Q = 0$ für das Hyperbelpolygon) von gleicher Ordnung sind, und diese Voraussetzung ist, wie die vorstehende Behandlung des von Herrn Schottky gewählten Beispiels zeigt, nicht gerechtfertigt. Um seine Bezeichnungen zu erhalten, muß man unsere Buchstaben

$z, \zeta, Z, q, \ldots \pi, \varkappa, \ldots$ bzw. ersetzen durch
$y, x, z, Q, \ldots p, q, \ldots$

Die Anwendung der Transformation (6) auf die vorausgesetzte Gleichung $\Psi(z, Q) = 0$ und die Entwicklung nach Potenzen von p führt dann bei Schottky zu dem Schlusse $\Phi(z, q) = \Psi(z, Q)$, der sich durch die Forderung ergibt, daß z (und somit p) in der Entwicklung nicht vorkommen darf. Hierin liegt der Fehlschluß, denn es ist nach obigem auf Grund meines Ansatzes $\Psi(z, Q)$ von der vierten und $\Phi(z, P)$ von der dritten Ordnung, und doch kann auf Grund der Gleichung (8) die Bedingung $\Psi = 0$ immer eine Folge von $\Phi = 0$ sein, und es fällt $p\,(= 2\pi)$ rechts heraus, da π eben wieder in $P\,(= \Phi)$ multipliziert ist, während π^2 und π^3 identisch herausfallen. Der vermeintliche Widerspruch ist also nicht vorhanden; er löst sich nach den Entwicklungen in Nr. 4 dahin auf, daß die durch die Transformation (6) abgeleitete Gleichung für ζ nichts anderes ist als ein partikuläres Integral der Gleichung für z, und als solches auch ζ selbst (in π) enthalten darf.

6. Herr Schottky untersucht an Stelle von (6) auch den Einfluß der allgemeinen Transformation

$$z = \zeta^n,$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Es wird in der z-Ebene ein Polygon betrachtet, begrenzt von geraden Linien und von denjenigen Kurven $n$ter Ordnung, die den Geraden der ζ-Ebene zugeordnet sind; ihm entspricht in der ζ-Ebene ein Polygon von Kurven, die aus den geraden Linien der z-Ebene hervorgehen, und von geraden Linien, die den eben erwähnten Kurven $n$ter Ordnung zugeordnet sind. Bei der Voraussetzung, daß die zur konformen Abbildung dieser Polygone auf der Halbebene dienenden Differentialgleichungen $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ von gleicher Ordnung sind, ergibt sich für das Beispiel der obigen Parabel- und Hyperbelpolygone der von Herrn Schottky betonte Widerspruch; diese Voraussetzung ist aber nicht notwendig und wird, wie das obige Beispiel $n = 2$ zeigt, nicht zutreffen. Um die Frage zu entscheiden, müßten die Gleichungen wirklich aufgestellt werden; dazu ist man aber zur Zeit nicht im Stande, wenngleich die Grundlage dafür in Sylvester's Theorie der Reciprokanten vorliegt. Für das von mir behandelte Problem der Kegelschnittpolygone genügen indessen die vorstehenden Entwicklungen, um den vermeintlichen Widerspruch aufzuklären. Für den allge-

meinen Fall werden jedenfalls auch Relationen der Form (8) gültig sein.

7. Bezeichnet man die Brennpunkte eines Kegelschnittes mit a, b und sind a_1, b_1 die konjugiert imaginären Zahlen, so ist bekanntlich

$$\frac{z''}{z'} - \frac{1}{2}\frac{T'}{T}z' = \frac{z_1''}{z_1'} - \frac{1}{2}\frac{T_1'}{T_1}z_1' = R \tag{11}$$

ein auf dem Kegelschnitt reeller Ausdruck (vgl. § 4 der Abhandlung II), wobei $T = (z-a)(z-b)$ gesetzt wird. Durch Elimination von a, b aus dieser Relation kann man die Differentialgleichung der Kegelschnitte ableiten, ohne auf die Sylvesterschen Reziprokanten zurückzugreifen. Es ist

$$R = q - \frac{1}{2}\frac{T'}{T}z' \quad \text{oder} \quad z' = -z(R-q)\frac{T}{T'}. \tag{12}$$

Durch Differentiation nach Z und Einsetzen des Wertes von z' aus (11) ergibt sich:

$$\begin{aligned} R - q' &= -\frac{1}{2}\frac{T''}{T}z'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{T'}{T}\right)^2 z'^2 - \frac{1}{2}\frac{T'}{T}qz' \\ &= -2(R-q)^2\frac{T''T}{T'^2} + 2(R-q)^2 + q(R-q), \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} P = q' + q^2 - 3Rq + 2R^2 - R' &= 2(R-q)^2\frac{T''T}{T'^2} \\ &= -(R-q)\frac{T''}{T'}z', \end{aligned} \tag{13}$$

folglich durch nochmaliges Differenzieren:

$$P' = -(R-q)\frac{T''}{T'}qz' - (R'-q')\frac{T''}{T'}z' + (R-q)\left(\frac{T''}{T'}\right)z'^2$$

oder durch Benutzung von (13)

$$P'(R-q) = P[q(R-q) + R' - q' + P],$$

also endlich:

$$P' - 2RP = 0,$$

d. i. die obige Gleichung (4). Ein von zwei willkürlichen Konstanten a, b abhängiges Integral dieser Gleichung

ist demnach durch die Gleichung (11) gegeben, ebenso wie die Gleichung (10) ein von einer Konstanten abhängiges Integral der Gleichung $P = 0$ darstellt.

Es mag noch folgende Eigenschaft der Gleichung (4) hervorgehoben werden. Macht man den Ansatz

$$z - g = (Z - A)^2 Z(Z - A),$$

wo g eine Ecke des Polygons und A den entsprechenden Punkt der X-Axe bezeichnet, so wird zufolge der Resultate der Abhandlung II:

$$R = \frac{\lambda - 1}{Z - A} + \cdots, \quad q = \frac{\lambda - 1}{Z - A} + \cdots,$$

und setzt man diese Werte in (4) ein, so fallen die Glieder mit $(Z - A)^{-2}$ in der Tat ganz heraus.

9. Die Gleichungen (11) und (12) sind besonders geeignet, um das Verhalten von z zu beschreiben, wenn Z einen Umgang um einen Punkt A beschreibt. Überschreitet Z die reelle Axe, so vertauscht sich Z mit $Z_1 = X - iY$; und wenn diesem Wege von Z in der z-Ebene ein Überschreiten der geraden Linie

$$(14) \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \text{ oder } \alpha(z + z_1) - \beta i(z - z_1) + 2\gamma = 0$$

entspricht, so wird dem Punkte Z_1 in der z-Ebene ein Punkt $z_1^* = x^* - iy^*$ zugeordnet, definiert durch die Gleichung:

$$(15) \qquad \alpha(z + z_1^*) - \beta i(z - z_1^*) + 2\gamma = 0.$$

Der unteren Halbebene ($Y < 0$) entspricht so das Spiegelbild des gegebenen Polygons an der Linie. Einer Kurve $\varphi(z, z_1) = 0$ im Innern des gegebenen Polygons entspricht in dem Spiegelbild die Kurve, die entsteht, wenn man in $\varphi(z, z_1)$

$$(16) \quad z = -\frac{(\alpha + i\beta) z_1^* + 2\gamma}{\alpha - i\beta}, \quad z_1 = -\frac{(\alpha - i\beta) z^* + 2\gamma}{\alpha + i\beta}$$

setzt, wo $z^* = x^* + iy^*$. Stoßen in der betrachteten Ecke des Polygons zwei gerade Linien zusammen, und hat die zweite die Gleichung

$$(17) \qquad \alpha'(z + z_1) - \beta' i(z - z_1) + 2\gamma = 0,$$

so geht dieselbe über in die Gerade:

$$(18) \quad \begin{aligned} &(z^* + z_1^*)[\alpha'(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta'\alpha\beta] - i(z^* - z_1^*)[2\alpha'\alpha\beta - \beta'(\alpha^2 - \beta^2] \\ &\qquad + 4\gamma(\alpha\alpha' + \beta\beta') = 0. \end{aligned}$$

Eine nochmalige Spiegelung an der Linie (18) führt den Punkt Z in die obere Halbebene zurück. Ist $\lambda\pi$ der Winkel der beiden Linien (15) und (17), so entsteht die erste Spiegelung durch ein Umklappen der Ebene um die Gerade (15), und analytisch durch Multiplikation von z (wenn z auf der Geraden (17) liegt) mit $\varepsilon = e^{\lambda\pi i}$; bei weiterer Spiegelung an der Geraden (18) wird z nochmals mit ε, im ganzen also mit ε^2 multipliziert. Die Differentialgleichung (4) muß dabei ungeändert bleiben. In der Tat bleibt in (11) q ungeändert und in $T = (z - a)(z - b)$, $T' = 2z - (a + b)$ werden die Integrationskonstanten a, b ersetzt durch $a\varepsilon^{-2}$, $b\varepsilon^{-2}$; d. h. ein Integral der Gleichung (15) geht in ein anderes derselben Gleichung über. Der Wert z_1^* muß dabei ebenfalls der Gleichung (4) genügen, was durch die Relation (11) bestätigt wird.

Stößt die Gerade (15) in der betreffenden Ecke an einen Kegelschnitt $\varphi(z, z_1) = 0$, so geht dieser bei der ersten Spiegelung in einen kongruenten Kegelschnitt über, dessen Gleichung mittels der Substitution (16) in Variabeln z^*, z_1^* aufgestellt werden kann. Sei dieselbe $\psi(z^*, z_1^*) = 0$, so besteht nun die zweite Spiegelung (die in die obere Halbebene und zu einem Punkt $\bar{z}$, z_1 führt) darin, daß man aus den Gleichungen

$$\psi(\bar{z}, z_1^*) = 0, \quad \psi_1(z^*, z_1) = 0$$

und der Gleichung (16) die Größen z^* und z_1^* eliminiert, nachdem in (16) $\bar{z}$, $\bar{z}_1$ an Stelle von z, z_1 geschrieben ist; ψ_1 soll dabei aus ψ entstehen, indem man in den Koeffizienten i durch $-i$ ersetzt.

10. Kehren wir zu obigem Beispiel des Parabelpolygons zurück, das wir durch die Gleichung (6) auf ein Hyperbelpolygon der ζ-Ebene abgebildet hatten. Der Spiegelung an einer Hyperbel in der ζ-Ebene entspricht also in der z-Ebene eine Spiegelung an einer der Hyperbel entsprechenden geraden Linie. Sei letztere durch die Gleichung

$$\alpha(z + z_1) - i\beta(z - z_1) + \gamma = 0 \tag{19}$$

gegeben, so ist die zugehörige Hyperbel:

$$\alpha(\zeta^2 + \zeta_1^2) - i\beta(\zeta^2 - \zeta_1^2) + \gamma = 0\,. \tag{19a}$$

Einer zweiten geradlinigen Seite, die mit (19) in einer Ecke des Polygons zusammenstößt, nämlich

$$\alpha'(z+z_1) - i\beta'(z-z_1) + \gamma' = 0 \tag{20}$$

entspricht die Hyperbel

$$\alpha'(\zeta^2+\zeta_1^2) - i\beta'(\zeta^2-\zeta_1^2) + \gamma' = 0\,. \tag{20a}$$

Die Spiegelung an (19a) geschieht durch die zu (16) analogen Gleichungen

$$\zeta^2 = -\frac{(\alpha+i\beta)\zeta_1^{*2} + 2\gamma}{\alpha - i\beta}, \quad \zeta_1^2 = -\frac{(\alpha-i\beta)\zeta^{*2} + 2\gamma}{\alpha+i\beta} \tag{21}$$

und dadurch geht die Hyperbel (20a) über in die Kurve:

$$A(\zeta^{*2}+\zeta_1^{*2}) - iB(\zeta^{*2}-\zeta_1^{*2}) + C = 0\,,$$

d. h. wieder in eine Hyperbel mit Mittelpunkt im Anfangspunkte, wo A, B, C wie in (18) zu berechnen sind. Das Flächenstück zwischen beiden Hyperbeln entspricht der unteren Halbebene $Y<0$. Wiederholt man die Spiegelung, so erhält man eine dritte Hyperbel, und der Fläche zwischen der zweiten und dritten Hyperbel entspricht wieder die obere Halbebene $Y>0$.

Aus einer geraden Linie (17) wird bei der Spiegelung (21) eine Kurve, die sich aus den Gleichungen

$$\alpha'\zeta - i\beta'\zeta_1^* + \gamma' = 0, \quad \alpha'\zeta_1 + i\beta'\zeta^* + \gamma' = 0,$$
$$\alpha(\zeta^2+\zeta_1^2) - i\beta(\zeta^2-\zeta_1^2) + \gamma = 0$$

durch Elimination von ζ und ζ_1 ergibt; die Gleichung wird:

$$\gamma + 2\alpha\gamma'^2 - \alpha\beta'^2(\zeta^{*2}+\zeta_1^{*2}) + i\beta\beta'^2(\zeta_1^{*2}-\zeta^{*2})$$
$$+ 2i\gamma'\beta'[(\alpha+i\beta)\zeta^* - (\alpha-i\beta)\zeta_1^*] = 0$$

wieder eine gleichseitige Hyperbel; ihr Mittelpunkt liegt aber nicht im Anfangspunkt. Aus dem von geraden Linien und Hyperbeln begrenzten Polygon wird also ein Polygon, das nur von Hyperbeln begrenzt wird.

Liegen im Innern der betrachteten Flächenteile Brennpunkte der betreffenden Kurven, so sind die Flächenteile als mehrblätterig zu denken; auch die Halbebene $Y>0$ wird dann mehrfach überdeckt.

Der Linie (20) entspricht in der z-Ebene eine Parabel; der Hyperbel (20a) eine gerade Linie; die Spiegelung an der Hyperbel wird zur Umklappung an der geraden Linie. Dadurch entsteht aus der Parabel wieder eine Parabel, aber mit anderem Brennpunkte, es sei denn, daß die Gerade zufällig durch den Brennpunkt der Parabel hindurchgeht.

11. Die Kreispolygone erscheinen in der Abhandlung II zunächst als Ausnahmefälle; sie müssen aber in dem allgemeinen Ansatze doch als besondere Fälle enthalten sein. Nach der Schwarz'schen Theorie ist für sie, wenn $\{z, Z\}$ den Schwarzschen Ausdruck bezeichnet:

$$(22) \qquad \{z, Z\} = q' - \tfrac{1}{2} q^2 = \varrho(Z), \text{ also } q'' = qq' + \varrho',$$

wenn ϱ eine gewisse rationale Funktion von Z bedeutet. Andererseits gibt die Gleichung (11) für $a = b$ (also $T = (z-a)^2$) als erstes Integral der Gleichung (4) beim Kreise:

$$(22\,a) \qquad R = q - \frac{z'}{z-a}$$

und, wenn man $z - a$ eliminiert:

$$(23) \qquad q' - R' - qR + R^2 = 0$$

und hieraus

$$q'' = R'' + q'R + R'q - 2RR',$$

also durch Vergleichung mit der zweiten Gleichung (22):

$$R'' + q'(R - q) + R'q - 2RR' - \varrho' = 0,$$

und wenn man q' mittels der Gleichung (23) eliminiert:

$$-q^2R + 2qR^2 - RR' - R^3 + R'' - \varrho' = 0;$$

andererseits, indem man den Wert von q' aus (23) in die erste Gleichung (22) einsetzt:

$$q^2 - 2Rq + 2R^2 - 2R' + 2\varrho = 0.$$

Die letztere Gleichung, mit R multipliziert und zur vorhergehenden addiert, gibt:

$$(24) \qquad R^3 - 3RR' + R'' + 2\varrho R - \varrho' = 0.$$

Nach Gleichung (41) in § 7 der Abhandlung II sollte eine Gleichung der Form

$$(25) \qquad R' - \tfrac{1}{2}R^2 = \tau(Z), \text{ also auch: } R'' = RR' + \tau'$$

bestehen, wenn τ eine gewisse rationale Funktion bezeichnet. Setzt man hieraus die Werte von R' und R'' in (24) ein, so ergibt sich:

$$2R(\varrho - \tau) = \varrho' - \tau'.$$

Da nun R keine rationale Funktion sein kann, so folgt

(26) $$\varrho = \tau, \text{ also } \varrho' = \tau',$$

und somit, da die linke Seite von (25) gleich $\{W, Z\}$ ist,

$$\{W, Z\} = \{z, Z\}, \text{ wenn } R = \frac{W''}{W'}$$

gesetzt wird; folglich:

$$W = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

wo α, β, γ, δ Konstante bezeichnen, und hieraus

$$\frac{W''}{W'} = \frac{-2\gamma z'}{\gamma z + \delta} + \frac{z''}{z'},$$

wodurch die Gleichung (22a) in der Tat erfüllt ist; diese aber ist ein Integral von (4); also auch letztere Gleichung ist erfüllt. Die Kreisbogenpolygone ordnen sich in die allgemeine Theorie der Kegelschnittpolygone ohne Schwierigkeit ein.

Die Gleichung (24) läßt sich in der Tat nunmehr in der Form schreiben:

$$R(R^2 - 2R' + 2\varrho) + R'' - RR' - \varrho' = 0,$$

oder:
$$\frac{d\{W, Z\}}{dZ} - \varrho' = 2[\{W, Z\} - \varrho]R,$$

ist also erfüllt, sobald die eckige Klammer der rechten Seite verschwindet, wie es die Gleichungen (26) im Zusammenhang mit der Gleichung (41) der Abhandlung II verlangen.

12. Der besseren Übersicht wegen wiederholen wir hier (aus Abhandlung II) die genauere Definition der auf dem Rande reellen Funktion R, die sich an den singulären Stellen verhält wie eine rationale Funktion. Setzt man $R = \frac{W''}{W'}$, und bezeichnet $\{W, Z\}$ wieder den Schwarzschen Differentialausdruck, so ist W aus einer Differentialgleichung der folgenden Form zu bestimmen:

$$R' - \tfrac{1}{2}R^2 = \{W, Z\} = -\tfrac{1}{2}\sum_i \frac{\lambda_i^2 - 1}{Z - A_i} + \tfrac{1}{4}\sum_k \left(\frac{1}{(Z - P_k)^2} + \frac{1}{(Z - Q_k)^2}\right) + \sum_i \frac{\beta_i}{Z - A_i} + \sum_k \left(\frac{\delta_k}{Z - P_k} + \frac{\delta_k'}{Z - Q_k}\right).$$

Hierin bezieht sich der Index i auf die verschiedenen Polygonecken, der Index k auf die im Innern des Polygons liegenden Brennpunkte der begrenzenden Kegelschnitte. Es bezeichnet A_i den Punkt der X-Axe, welcher der $i$ten Ecke entspricht und $\lambda_i \pi$ den zugehörigen Polygonwinkel; P_k ist der Punkt der Halbebene $Y > 0$, der dem $k$ten Brennpunkt zugeordnet wird, Q_k der konjugierte Punkt der Halbebene $Y < 0$; β_i, δ_k, δ_k' bezeichnen gewisse Konstante, die mit den Größen A_i, P_k, Q_k durch gewisse Relationen verbunden sind, nämlich

$$\Sigma \beta_i + \Sigma(\delta_k + \delta_k') = 0,$$
$$\Sigma A_i \beta_i + \Sigma P_k \delta_k + \Sigma Q_k \delta_k' = \tfrac{1}{2}\Sigma(\lambda_i^2 - 1) - \tfrac{1}{2} N,$$
$$\Sigma A_i^2 \beta_i + \Sigma P_k^2 \delta_k + \Sigma Q_k^2 \delta_k' = \tfrac{1}{2}\Sigma(\lambda_i^2 - 1) A_i - \tfrac{3}{8}\Sigma(P_k + Q_k),$$

wo N die Anzahl der in Betracht kommenden Brennpunkte bezeichnet.

Der Schubmesser.
Ein neues Feinmessgerät für Festigkeitsversuche.

Von **A. Föppl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 3. März 1923.

Das bekannteste und weitaus wichtigste Instrument zur Ausführung genauer Messungen der elastischen Formänderung, die ein Körper unter einer Belastung erfährt, ist der Dehnungsmesser. Dem Vorgänger in meinem Lehramte, Johann Bauschinger, gebührt das Verdienst, den ersten sehr vielseitig verwendbaren Dehnungsmesser konstruiert zu haben, mit dem man die Längenänderung einer Strecke von einigen cm Länge bis auf etwa 0,1 Mikron genau messen kann. Ausgeführt wurde der Bauschingersche Dehnungsmesser von seinem Assistenten C. Klebe, der ein geschickter Feinmechaniker war und der mir später noch viele Jahre lang treue Dienste geleistet hat. Später hat Martens, der damalige Direktor des Berliner Materialprüfungsamtes einen in den Einzelheiten sehr verfeinerten Dehnungsmesser angegeben, der aber sonst in der Hauptsache mit dem von Bauschinger übereinstimmte. Heute wird der Dehnungsmesser meist in der ihm von Martens gegebenen Gestalt benützt.

So nützlich und brauchbar der Dehnungsmesser aber auch ist, läßt er doch immer noch den Wunsch nach einem zweiten Meßgerät offen, mit dem es möglich sein müßte, unmittelbar die elastische Winkeländerung zu messen, die ein ursprünglich rechter Winkel bei der Formänderung eines Körpers erfährt. Man denke sich nämlich im ursprünglichen Zustande des Körpers von einem Punkt 1 aus zwei rechtwinklig zueinander stehende Strecken nach irgend zwei Nachbarpunkten 2 und 3 gezogen. Der durch die drei Punkte bestimmte Winkel 213 erfährt bei der Formänderung

des Körpers im allgemeinen eine kleine Winkeländerung γ und die Aufgabe des Instruments, das als ein Schubmesser bezeichnet werden kann, besteht darin, diese Winkeländerung mit genügender Genauigkeit zu messen.

Wenn man annehmen darf, daß der Stoff, aus dem der Körper besteht, isotrop ist und daß er dem Hookeschen Elastizitätsgesetze gehorcht, besteht zwischen der Schiebung γ und der Schubspannung τ, die in den durch 12 und 13 beschriebenen Schnittrichtungen übertragen wird, der einfache Zusammenhang

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

worin G den „Schubmodul“ bedeutet, d. h. dieselbe Größe, die nach dem Vorgange von Kirchhoff und von Hertz von den Physikern häufig mit dem Buchstaben K bezeichnet und auch „Starrheitsmodul“ (modulus of rigidity) genannt wird.

Sobald es gelingt, bei einem Festigkeitsversuche γ genau genug zu messen, nämlich ungefähr so genau wie die elastische Dehnung mit dem Dehnungsmesser, vermag man auf Grund dieser Gleichung entweder bei bekanntem Spannungszustande den Schubmodul G aus dem Messungsergebnisse abzuleiten oder umgekehrt bei gegebenem Schubmodul auf die Schubspannung τ zu schließen, die in den durch die Winkelschenkel 12 und 13 angegebenen Schnittrichtungen übertragen wird. Ein Instrument, das die gestellte Forderung erfüllt, vermag daher für viele Zwecke, die man bei Festigkeitsversuchen anstrebt, sehr wertvolle Dienste zu leisten.

Schon vor vielen Jahren, nämlich bald nachdem ich als Nachfolger von Bauschinger die Leitung des mechanisch-technischen Laboratoriums der hiesigen technischen Hochschule übernommen hatte, habe ich mich um die Lösung der Aufgabe, ein brauchbares Instrument dieser Art zu konstruieren, selbst sehr ernsthaft bemüht. Dabei wurde ich von dem schon genannten C. Klebe unterstützt. Damals war uns aber kein Erfolg beschieden; die Messungen fielen nämlich bei häufiger Wiederholung immer wieder anders aus und es gelang uns nicht, alle Fehlerquellen aufzudecken und sie zu beseitigen. Freilich nimmt sich der alte Schubmesser, der von jener Zeit her noch in unserer Sammlung aufbewahrt wird, zu dem heute vorliegenden Instrument, mit dem

das Ziel schließlich ganz befriedigend erreicht werden konnte, ungefähr wie eine ziemlich grob gebaute Dampfmaschine zu einem feinen Uhrwerk aus.

Zum großen Teile ist übrigens der frühere Mißerfolg auch darauf zurückzuführen, daß ich mir das Ziel damals zu hoch gesteckt hatte. Meine Absicht ging nämlich ursprünglich darauf hinaus, den Schubmodul G irgend eines Metalls mit Hilfe eines gewöhnlichen Zugversuches an einem aus diesem Metalle hergestellten Flachstabe zu ermitteln. In den um 45^0 gegen die Hauptzugrichtung geneigten Schnittflächen treten nämlich bekanntlich Schubspannungen τ auf, die halb so groß sind wie die Hauptspannung. Wenn es uns gelungen wäre, die Winkeländerung γ genau genug zu messen, hätte man daher den Schubmodul G aus dem Zugversuche entnehmen können.

In das Verdienst, das neue Gerät geschaffen und soweit verbessert zu haben, daß man unter gewöhnlichen Umständen brauchbare Messungen damit ausführen kann, teilen sich zwei Laboratoriumsbeamte, der Konservator Herr Dr. Huber und der Werkmeister Herr Johann Mertel. Herr Mertel hatte sich schon vorher, insbesondere bei der Anfertigung von Dehnungsmessern in der von Martens angegebenen Bauart als ein sehr geschickter Mechaniker bewährt und Herr Dr. Huber hatte Gelegenheit, sich bei zahlreichen Versuchen der verschiedensten Art Erfahrungen über die Ausführung von Feinmessungen an elastisch veränderlichen Körpern zu sammeln. Die Vorbedingungen waren daher gegeben, um von einer verständnisvollen Zusammenarbeit beider Herren eine befriedigende Lösung der gestellten Aufgabe erhoffen zu dürfen.

Der erste Apparat, der aus dieser Zusammenarbeit hervorging, war zwar wiederum ein Mißerfolg, indem er ungefähr dieselben Mängel aufwies, wie der erste Schubmesser, den C. Klebe nach meinen Anregungen gebaut hatte. Es schien hiernach, als wenn die Aufgabe überhaupt nicht gelöst werden könnte. Aber die Herren Huber und Mertel ließen sich nicht abschrecken und ich gab gern meine Einwilligung dazu, daß sie ihre Bemühungen fortsetzten. Diese waren dann auch insofern von Erfolg gekrönt, als das neue Gerät wenigstens in allen Fällen, bei denen ein Gleiten der Befestigungsspitzen auf dem Probekörper nicht zu befürchten ist, insbesondere also bei der Anwendung zu Verdrehungs-

versuchen, allen Anforderungen genügt, so daß die damit ausgeführten Messungen an Genauigkeit nicht hinter denen eines guten Dehnungsmessers zurückstehen.

Die Ermittelung des Schubmoduls aus Zugversuchen läßt allerdings auch mit dem neuen Schubmesser immer noch zu wünschen übrig. Bei weichen Metallen, wie Kupfer, Flußeisen oder nicht zu hartem Stahl kann man zwar den Schubmodul auf diesem Wege mit befriedigender Genauigkeit ermitteln. Dagegen wollte es bisher noch nicht gelingen, eine brauchbare Messung für ein hartes Gußeisen durchzuführen. Der Grund für das verschiedene Verhalten ist darin zu erblicken, daß beim Zugversuche die unter 45^0 gegen die Hauptrichtung geneigten Strecken nicht nur gegeneinander gedreht werden, sondern daß sie sich zugleich auch etwas dehnen.

Um eine einwandfreie Messung der Winkeländerung γ beim Zugversuche durchführen zu können, muß man daher verlangen, daß das Instrument solche Dehnungen gestattet, ohne daß die Angabe der Drehung dadurch gefälscht werden könnte. Die Längenänderungen, um die es sich dabei handelt, sind unter gewöhnlichen Umständen so klein, daß sie durch elastische Formänderungen der beiden Hauptbestandteile ohne weitere Folgen an sich leicht ausgeglichen werden können. Dabei muß jedoch vorausgesetzt werden, daß die Befestigungspunkte des Schubmessers an dem Probekörper keine Verschiebung gegen diesen erfahren. An den Befestigungsstellen muß daher eine zur elastischen Formänderung der Bestandteile des Instruments ausreichende Kraft übertragen werden können, ohne daß dabei die Spitzen, in denen die Berührung erfolgt, ins Rutschen kämen.

Das ist eine Forderung, die nicht leicht zu erfüllen ist. Bei einem weichen Metall, wie insbesondere bei Kupfer, genügt es jedoch, wie der Erfolg lehrt, den Schubmesser durch Anziehen der Bügelschraube mit leichtem Druck an dem Probekörper zu befestigen. Die Spitzen setzen sich dadurch fest genug, um an dem Probekörper zu haften, so daß sie sich im Verlaufe des Versuches nicht dagegen verschieben können. Bei einem härteren Metalle muß man dagegen immer mit der Möglichkeit eines Gleitens rechnen. Daß ein solches Gleiten zugleich auch mit einer von Zufälligkeiten abhängigen Drehung verbunden ist, sieht man

leicht ein. Daher darf man den Versuchsergebnissen erst Vertrauen schenken, wenn bei häufiger Wiederholung des Versuches an verschiedenen Stellen des Probekörpers hinreichend miteinander übereinstimmende Werte erhalten werden.

Mit Rücksicht hierauf erblicke ich den Hauptgebrauchswert des Schubmessers, so wie er heute vorliegt, darin, daß es mit seiner Hilfe möglich ist, die Schubspannungen unmittelbar zu messen, die in einem auf Verdrehen beanspruchten Stabe auftreten. In diesem Falle kommt nämlich die Gefahr, daß die Spitzen gleiten könnten, überhaupt nicht in Betracht, da die in den betreffenden Richtungen gehenden Strecken ihre Längen gar nicht ändern.

Im Verlaufe meiner Arbeiten über die Verdrehungssteifigkeit der Walzeisenträger habe ich vor einigen Jahren die Behauptung aufgestellt, daß die größte Schubspannung bei der Verdrehung eines Stabes von doppel-T-förmigem Querschnitt in der Mitte des Flansches auftrete und nicht, wie man früher allgemein annahm, in der Stegmitte. Diese Behauptung ist von manchen Sachverständigen bestritten oder wenigstens bezweifelt und vielleicht von den meisten nicht geglaubt worden. Es mußte mir daher daran liegen, sie auf dem Versuchswege zu prüfen.

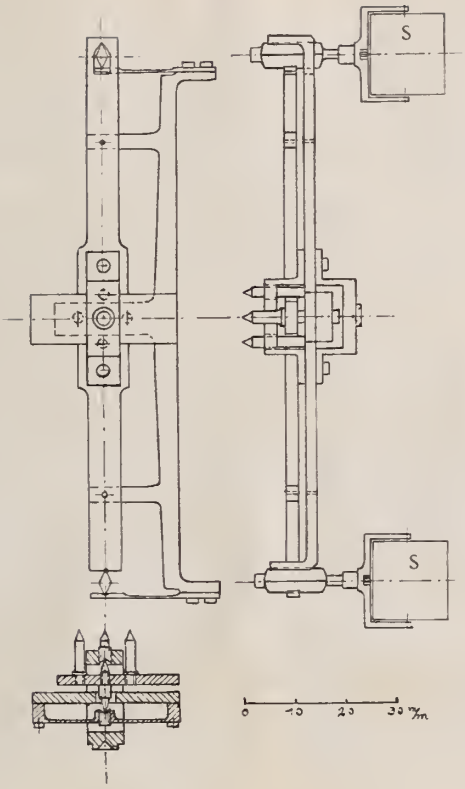
Hierfür stand mir anfänglich kein anderes Mittel zur Verfügung, als die Oberfläche des Versuchskörpers gut zu glätten und zu polieren und die Verdrehung so weit fortzusetzen, bis sich die ersten Fließfiguren deutlich sichtbar gemacht hatten, worauf der Versuch abgebrochen wurde. In der Tat traten auch diese Fließfiguren an der von mir erwarteten Stelle auf und nicht in der Mitte des Stegs. Dieser Befund war beweiskräftig genug, um jeden Sachverständigen, der sich die Versuchsstücke bisher ansehen konnte, für meine Ansicht zu gewinnen. Immerhin war jedoch die Beweisführung insofern nicht ganz einwandfrei, als man bei dem Versuche die Elastizitätsgrenze überschreiten mußte, um die Fließfiguren hervorzubringen, während sich die Behauptung, die geprüft werden sollte, auf einen Zustand im rein elastischen Gebiete der Formänderung bezog. In diesem Falle ist der Schubmesser das einfachste und zuverlässigste Hilfsmittel, um einen in jeder Hinsicht befriedigenden Nachweis für die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung zu erbringen.

Ich brauche kaum besonders hinzuzufügen, daß dieser Versuch ausgeführt wurde und daß er das erwartete Ergebnis lieferte. Die zahlenmäßige Wiedergabe dieses Versuches und einiger anderer Versuche, bei denen der Schubmesser verwendet wurde, möchte ich meinem Mitarbeiter Herrn Dr. Huber überlassen, der darüber an anderer Stelle zu berichten beabsichtigt.

Das Instrument besteht, wie die beistehende Zeichnung erkennen läßt, aus zwei Hauptbestandteilen, nämlich aus zwei Stängelchen von rund 10 cm Länge, die nebeneinander liegen und von vornherein ungefähr in der gleichen Richtung gehen, sich aber im Verlaufe des Versuches ein wenig gegeneinander drehen, nämlich um den Betrag des Winkels γ, den man zu messen beabsichtigt. Die beiden Hauptbestandteile werden von beiden Seiten her durch zwei Deckel zusammengehalten, in denen sich die Lagerung für die Spitzen befindet, um die sich die Stängelchen gegeneinander drehen können.

Das eine Stängelchen stützt sich mit zwei Spitzen gegen den Probekörper, die um 1 cm voneinander entfernt sind und deren Verbindungslinie in der Richtung des Stängelchens geht. Das andere Stängelchen hat in der Mitte einen kurzen Querarm und in diesem sind die beiden Spitzen gelagert, mit denen es sich gegen den Probekörper stützt. Auch diese beiden Spitzen sind um 1 cm voneinander entfernt und die Verbindungsstrecke geht in der Richtung des Querarms, also senkrecht zur Richtung der beiden Stängelchen. Der zu 1 cm gewählte Abstand von je zwei zusammengehörigen Spitzen könnte ebensogut auch größer oder kleiner sein, ohne daß dadurch eine wesentliche Änderung in der Wirkungsweise des Instruments herbeigeführt würde. Vermutlich wird es sich empfehlen, ihn bei späteren Ausführungen etwas kleiner, vielleicht gleich 5 mm zu wählen.

Im Mittelpunkte des durch die vier Befestigungsspitzen gebildeten Quadrats sind die beiden Hauptbestandteile drehbar gegeneinander gelagert. Die Lagerung erfolgt in verschiebbaren Körnern, die in die beiden Deckel eingelassen sind. Sie bedarf einer besonders sorgfältigen Ausbildung, weil das Instrument in vier Punkten mit dem Probekörper verbunden werden soll, während ein starrer Körper schon beim Festhalten an drei Punkten unverschieblich festliegt. Um die hiernach erforderliche Anpassung



zu ermöglichen, ist der kleine Stahlbolzen, der nach beiden Seiten hin die Spitzen trägt, um die sich die beiden Stängelchen gegeneinander drehen können, federnd gelagert, wie aus dem Schnitte im untern Teil der Abbildung zu erkennen ist.

Der Winkel γ, um den sich die beiden Stängelchen gegeneinander drehen, wird durch zwei Spiegel gemessen, die an beiden Enden nach Art des Dehnungsmessers von Martens stelzenartig einerseits gegen das eine Stängelchen und anderseits gegen zwei an den Enden des anderen Stängelchens angebrachte federnde Arme gestützt sind. Die Anordnung ist dabei so getroffen, daß eine Drehung der beiden Stängelchen um einen Winkel γ zu entgegengesetzten Drehungen der beiden Spiegel führt. Hierdurch wird ähnlich wie beim Dehnungsmesser der Fehler ausgeschaltet,

der andernfalls durch eine Drehung des ganzen Instruments oder des Probekörpers herbeigeführt würde, an dem es befestigt ist. Die Ablesung erfolgt mit Fernrohren, die in einem geeigneten Abstande von etwa 1,5 bis 2 m aufgestellt werden und mit denen man die Verschiebungen des Spiegelbildes eines feststehenden Maßstabes abliest.

Das aus Stahl hergestellte Instrument wiegt mit Einschluß der beiden kleinen Bügel, durch die die beiden Hauptbestandteile in der Mitte drehbar zusammengehalten werden und mit Einschluß der beiden Spiegel, jedoch ohne den großen Bügel, der dazu dient, das Instrument an dem Probekörper festzuklemmen und der je nach Bedarf ausgewechselt werden kann, rund 53 gr. Wenn das Instrument angebracht werden soll, stellt man die beiden Stängelchen zuerst gegeneinander fest, so daß sie sich nicht gegeneinander drehen können. Dazu dienen zwei kleine Stifte, die man durch die in etwa 35 mm von der Mitte beiderseits angebrachten und aus der Zeichnung ersichtlichen Löcher steckt. Nach dem Anlegen des Instruments zieht man diese Stifte wieder heraus.

Etwaige Anfragen wegen Lieferung eines solchen Schubmessers und des Preises, zu dem er bezogen werden kann, wären an den Werkmeister des mechanisch-technischen Laboratoriums der Technischen Hochschule in München, Herrn Joh. Mertel zu richten.

Anurognathus Ammoni, ein neuer Flugsaurier.

Von **Ludwig Döderlein.**

Vorgetragen in der Sitzung am 5. Mai 1923.

Einleitung.

Die mir vorliegende Platte von lithographischem Schiefer mit den Resten eines neuen Pterosauriers kam schon vor einer längeren Reihe von Jahren aus den Händen eines Steinbruchbesitzers in Eichstätt in den Besitz des kürzlich in München verstorbenen Oberbergdirektors Ludwig v. Ammon. Ein genauerer Fundort war nicht mehr zu ermitteln. Herr v. Ammon hatte die Absicht gehabt, das Exemplar selbst zu beschreiben, legte es aber nicht lange vor seinem Tode in meine Hände mit der Bestimmung, es nach der Bearbeitung der paläontologischen Staatssammlung in München zu übergeben. Das Fossil erschien ihm deswegen besonders bemerkenswert, weil es noch unverkennbare Reste der Flughaut zeigte, von der bisher nur bei einem der zahlreichen Exemplare von *Pterodactylus*, die man kannte, deutliche Spuren erwähnt worden waren (*Pt. elegans* im Haarlemer Museum, vgl. Zittel). Denn zu dieser Gattung, von der gerade aus dem lithographischen Schiefer bereits eine größere Anzahl von Arten bekannt ist, schien es seines rudimentären Schwanzes wegen zu gehören.

Die auffallende, mächtig entwickelte fünfte Zehe am Hinterfuß überzeugte mich aber sofort, daß es trotz seines Stummelschwanzes nicht zur Gattung *Pterodactylus* gehören könne, und der äußerst kurze Metacarpus, die kurzen Halswirbel, die vollkommene Trennung der beiden Präorbitallücken am Schädel entfernen es durchaus aus der ganzen Gruppe der Pterodactyloidea und verweisen es entschieden zur Gruppe der sonst langschwänzigen Rhamphorhynchoidea; unter diesen nimmt es schon wegen

Fig. 1. *Anurognathus Ammoni* nov. gen., nov. sp. aus dem lithographischen Schiefer von Eichstätt nach einer Photographie im ursprünglichen Zustande. Das Relief der Flughaut ist an einigen Stellen künstlich etwas verstärkt, doch in durchaus sachgemäßer Weise. Der Sakralteil und das rechte Kniegelenk sind eingeleimt, letzteres verkehrt. Natürliche Größe.

seines Stummelschwanzes eine ganz eigentümliche Stellung ein und stellt eine noch unbekannte, auch in anderer Beziehung höchst merkwürdige Form dar, der ich den Namen *Anurognathus Ammoni* nov. gen., nov. sp. beilege. Die Verkümmerung des Schwanzes ist bei dieser Form eingetreten ganz unabhängig von allen übrigen dadurch ausgezeichneten Formen, die eine natürliche geschlossene Gruppe der Pterosaurier darstellen, die Pterodactyloidea, die sich in ganz anderer Richtung als unser *Anurognathus* aus den ursprünglichen langgeschwänzten Rhamphorhynchoidea entwickelt haben.

Anurognathus besaß etwa die Größe einer Amsel (*Turdus merula*); was aber die Flugorgane anbelangt, so erinnert unter allen Vögeln, die ich zum Vergleich heranzog, die Nachtschwalbe (*Caprimulgus europaeus*) noch am meisten an unsern neuen Flugsaurier.

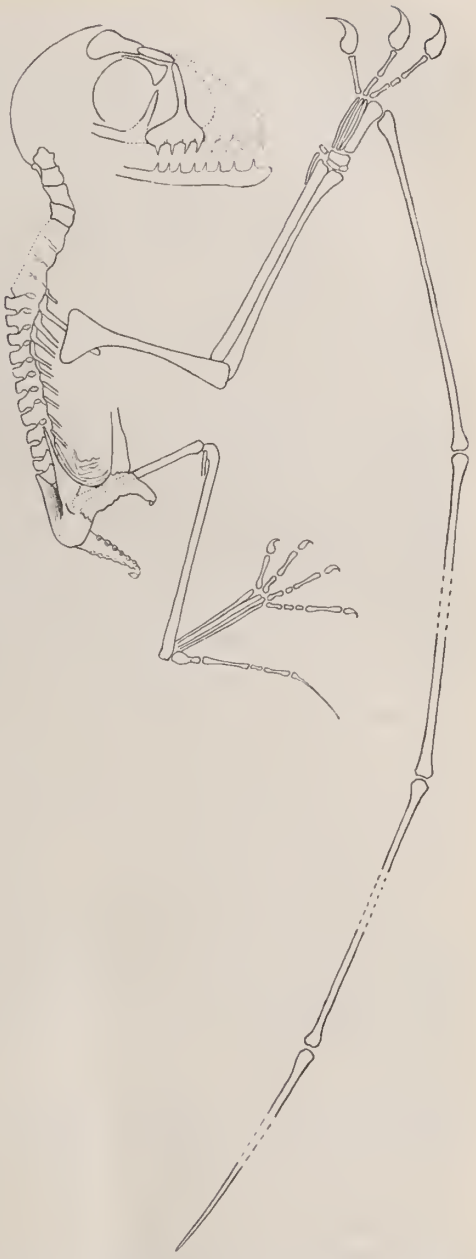


Fig. 2. *Anurognathus Ammoni.* Rekonstruktion des Skeletts. Schultergürtel, Rippenenden, Sternum, Bauchrippen sind absichtlich weggelassen. Ein Teil des Schädels und der Flugfinger ist ergänzt. 3/4 natürliche Größe.

Bei den vielfachen Vergleichen mit den übrigen Pterosauriern und einer Auswahl von Vögeln und Chiropteren, die ich bei der Besprechung des Baues von *Anurognathus* anstellte, fühlte ich die Notwendigkeit, nicht die absoluten Größen der einzelnen Skeletteile zu vergleichen, sondern relative Werte zu verwenden. Da es praktisch durchführbar war und gute Resultate ergab, wählte ich als Einheit die Länge der Rumpfwirbelsäule vom 1. Rückenwirbel bis zum letzten Sakralwirbel (Rumpf = 1). Als relative Länge des Schädels z. B. bezeichne ich die Zahl, die angibt, wie oft die Rumpflänge in der Schädellänge enthalten ist. Auch in Fällen, da die Wirbelsäule nicht im Zusammenhang vorliegt, läßt sich die Rumpflänge aus der meist bekannten Zahl der Wirbel annähernd berechnen, so daß trotz der nicht abzuleugnenden Schwierigkeiten diese Größe in den meisten Fällen mit einer für unsere Zwecke genügenden Sicherheit festgestellt werden kann; auf absolut genaue Zahlen kommt es ja doch nicht an. Es war mir nahe gelegt worden, einen einheitlichen Knochen, am besten den Humerus, als Einheit zu benutzen, aber angesichts der Tatsache, daß bei zwei der vorzüglichsten Flieger unter den Vögeln in einem Falle (*Cypselus*) der Humerus nur 0.35 der Rumpflänge, im andern Falle (*Diomedea*) aber das 1.5 fache der Rumpflänge mißt, zog ich vor, eine konstantere Größe als Einheit zu suchen. Als 1. Rückenwirbel der Vögel nahm ich den ersten, dessen Rippe nahezu oder völlig das Sternum erreicht; bei Chiropteren, die mit stark gekrümmter Rumpfwirbelsäule fliegen, nahm ich die Sehne des dadurch entstandenen Bogens als Einheit.

Bei der Auswahl der Vögel suchte ich typische meist einheimische Vertreter der wichtigsten Gruppen aus, die sich zum Vergleich mit Pterosauriern eignen könnten, und schied vor allem extrem ausgebildete Formen aus, wie die langbeinigen und langschnäbligen oder die besonders kurzflügligen Formen. Bei den Pterosauriern fand ich öfter die von mir gesuchten Größenangaben nicht im Text von den Autoren verzeichnet. Ich war dann darauf angewiesen, sie mir aus den Abbildungen, auch aus einzelnen guten Photographien, die ich benutzen konnte, selbst abzumessen. Aus solchen Messungen ließen sich nicht unschwer die relativen Größen feststellen, wenn auch in manchen Fällen die absoluten Größen unsicher blieben.

Für die Bereitstellung der Literatur sowie für die Erlaubnis, die wunderbare Sammlung von Pterosauriern in der Paläontologischen Staatssammlung in München benützen zu dürfen, bin ich den Herren Prof. Dr. Broili und Prof. Dr. v. Stromer-Reichenbach zu großem Danke verpflichtet.

I. Erhaltungszustand (Fig. 1).

Der vorliegende Flugsaurier geriet nach seinem Tode offenbar in nahezu unverletztem Zustande in den Kalkschlamm, aus dem sich der lithographische Schiefer bildete, und wurde rasch von ihm vollständig begraben, noch ehe die eintretende Fäulnis Zeit fand, den Zusammenhang der Skelettknochen zu lockern. Lediglich eine der Hinterzehen und vielleicht einige Schädelknochen scheinen noch vorher wohl durch Gewalt aus dem ursprünglichen Zusammenhang gerissen worden zu sein. Der linke Schultergürtel nebst der daran hängenden Gliedmaße ist etwas ventral- und kaudalwärts verschoben. Sonst scheint der ganze Körper in tadellosem natürlichem Zusammenhang zur Einbettung gekommen zu sein. Er liegt auf der linken Seite, die linken Extremitäten nach der rechten, die rechten nach der linken Hälfte der Platte ausgebreitet, der vordere Teil des Kopfes über dem linken Flugfinger, der rechte Hinterfuß über dem rechten Flugfinger liegend. Störende Überkreuzungen von Skeletteilen fanden fast nur insofern statt, daß die linke Mittelhand nebst einem Teil des Flugfingers den hinteren Teil der Halswirbelsäule verdeckt. Fast der ganze Teil der Platte, der von dem Skelett eingenommen ist, zeigt eine eigentümlich glatte, zum Teil mehr oder weniger deutliche Reliefiguren enthaltende Beschaffenheit, die ohne Zweifel durch die Weichteile, besonders durch die Flughaut veranlaßt ist. Deutliche Umrisse derselben, die ihre Formen darstellen, sind aber kaum mehr festzustellen.

An dem teilweise unbefriedigenden Zustand des Skeletts tragen zwei Umstände die Schuld. Erstens fehlt die Gegenplatte, in der nahezu der ganze Schädel stecken muß. Denn was von deutbaren Schädelspuren vorhanden ist, besteht fast nur aus Abdrücken einiger Knochen der linken Schädelseite. Auch ein großer Teil der Wirbelsäule, ein Teil des Beckens und der Gliedmaßen ist nur in Gestalt von Mulden erkennbar, die mehr oder weniger

deutliche Abdrücke der Skeletteile darstellen, die früher darin lagen. Der rechte und Teile des linken Schultergürtels und fast das ganze Sternum sowie die meisten Rippen fehlen ganz, ebenso beiderseits die drei äußeren Phalangen der Flugfinger. Ob die fehlenden Teile in der Gegenplatte blieben oder der ersten Präparation des Stückes zum Opfer fielen, die wohl hauptsächlich die Herstellung eines Schaustückes bezweckte, ist nicht zu entscheiden; nur der Sakralteil des Rumpfes war bei dieser ersten Präparation in die Mulde, aus der er sich gelöst hatte, wieder eingeleimt worden, ebenso das rechte Knie (verkehrt).

Ein zweiter Übelstand, der einen unbefriedigenden Zustand des Skeletts veranlaßte, besteht im Auftreten von kristallinischem Kalkspat an der Stelle oder in der Umgebung der Knochen. Dies geht gewöhnlich in der Weise vor sich, daß etwa in der Mitte eines Röhrenknochens nur dessen Lumen von Kalkspatkristallen erfüllt ist, während die umgebende Knochensubstanz noch völlig intakt geblieben ist. Näher den Gelenkenden ist auch ein Teil der inneren Knochenwand in Kalkspat verwandelt, und im Gelenkteil selbst ist statt des Knochens eine einheitliche Kristallmasse vorhanden, deren Oberfläche erst noch eine zarte äußere Knochenschicht zeigt, die weiterhin nur noch aus einzelnen Fetzen besteht und am Gelenkende selbst schließlich ganz verschwunden ist. Die Knochensubstanz erscheint nach und nach förmlich eingeschmolzen in den kristallinischen Kalkspat. Diese durchsichtige Masse bewahrt oft noch in allen Einzelheiten die äußeren Formen des betreffenden Knochens.

Äußerst fatal wird es aber, wenn auch auf der äußeren Oberfläche sich Kalkspat knollenförmig ansetzt, mit dem dann der Knochen förmlich verschmilzt, so daß er sich nicht mehr davon trennen läßt. Der Knochen verliert dadurch seine natürliche Form und an seiner Stelle finden sich nur unförmliche Gebilde von kristallinischem Kalkspat. Derartigen Verunstaltungen sind die Gelenke vor allem ausgesetzt. So erscheinen bei dem vorliegenden Fossil die Zehen als rosenkranzförmige Bildungen, deren kuglige Verdickungen den unförmlich aufgetriebenen Gelenken zwischen den sonst unverändert dünn gebliebenen Mittelstücken der Phalangen entsprechen. Innerhalb solcher Kalkspatmassen lassen sich Knochengrenzen meist nicht mehr nachweisen.

Man glaubt mitunter in den zu Kalkspat umgewandelten Hand- oder Fußwurzeln noch die einzelnen Knöchelchen zu erkennen; doch sind es gewöhnlich einzelne Kalkspatkristalle, die eine solche Täuschung hervorrufen. Bei dem vorliegenden Stück ist u. a. die ganze Kreuzbeinregion mit den dazu gehörigen Teilen des Beckens in eine gleichmäßige kompakte Kalkspatmasse verwandelt, ebenso die beiden Fußwurzeln und die rechte Handwurzel nebst der Mittelhand. Auch innerhalb der Wirbelsäule lassen sich aus diesem Grunde nur wenig Einzelheiten mehr feststellen.

2. Pneumatische Knochen.

Soweit die Knochen des Skeletts selbst noch vorliegen, zeigen sie sämtlich auffallend weite Hohlräume in ihrem Innern, so daß alle Knochen äußerst dünnwandig sind. Durch jeden der langen Gliedmaßenknochen zieht sich ein ununterbrochener Kanal, selbst durch die sehr dünnen Phalangen, während die übrigen Knochen von einer weitmaschigen Spongiosa erfüllt sind. Solche pneumatischen Räume scheinen nur den Bauchrippen zu fehlen.

3. Schädel (Fig. 3).

Offenbar war der Kopf noch in natürlichem Zusammenhang mit den Halswirbeln erhalten gewesen, und zwar mit der linken Seite auf der ersten Phalange des linken Flugfingers liegend. Eine sonst unverständliche, hinten scharf umrandete Vertiefung auf der Kalkplatte im Anschluß an die Halswirbel muß als Umriß des Hinterkopfs angesehen werden; als Andeutung des Auges muß eine auffal-

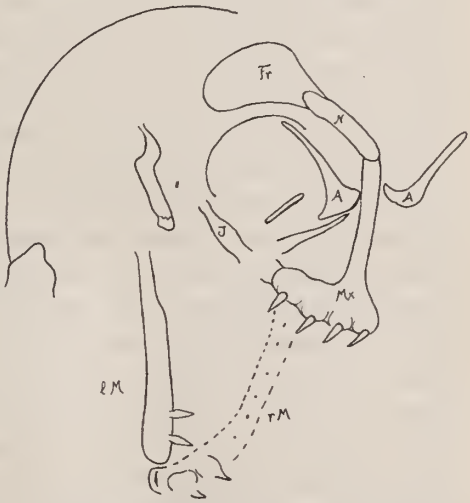


Fig. 3. Schädelknochen. *A* Adlacrymale. *Fr* Frontale. *J* Jugale. *lM* linker Unterkieferast von der Seite. *rM* rechter Unterkieferast von oben mit den Eindrücken von 8 Zähnen. *Mx* Maxillare mit 4 Zähnen. *N* Nasale.

lende runde Erhöhung gelten, die dorsal noch Spuren einiger Sklerotikalplatten zu zeigen scheint. Von Schädelknochen selbst sind nur ganz vereinzelte kleine Bruchstücke vorhanden, von denen zwei nach ihrer Lage als Teile des linken Jugale anzusehen sind, dazu zwei dreischenklige Knochen, die die beiden Adlacrymalia (v. Huene) darstellen dürften. Von weiteren Schädelknochen sind nur Abdrücke vorhanden in Gestalt von scharf umgrenzten Mulden. Unter diesen sind mit aller Sicherheit Frontale, Nasale und Maxillare mit 4 Zähnen der linken Seite festzustellen, die noch zusammenhängend ihre natürliche Lage gegen die Orbita gewahrt haben. Sonst ist, etwas aus der ursprünglichen Lage verschoben, noch der Abdruck des linken Dentale mit den zwei vordersten Zähnen deutlich. Während dieser die Seitenansicht bietet, läßt sich, fast nur durch die Eindrücke der 8 Zahnspitzen kenntlich, der Bogen, den das rechte Dentale bildet, erkennen.

Eine Mulde von 20 mm Länge und 2.2 mm Höhe stellt den Abdruck der Außenwand des linken Unterkieferastes dar; es dürfte der größte Teil des Dentale sein, dessen hinteres Ende unvollständig ist; sein vorderster Teil zeigt sich ganz leicht abwärts gebogen, zugleich gegen die Symphyse zu stark einwärts gebogen. Die scharfen Eindrücke der Kronen von den zwei vordersten Zähnen sind erhalten, die als spitze, fast gerade Kegel von 0.4 mm Dicke an der Basis sich zu einer Höhe von 2.6 mm fast senkrecht aus dem Knochen erheben. Vor den Zähnen verlängert sich der Unterkiefer noch zu einem etwa 2 mm langen Symphysenteil. Wie stark die Einbiegung des Unterkiefers gegen die Symphyse zu ist, erkennt man sehr gut an den Spuren, die der rechte Unterkiefer auf der Platte hinterlassen hat. In unmittelbarem Zusammenhang mit dem Vorderende des linken Unterkiefers findet sich ein tiefer Eindruck, der den Symphysenrand des rechten Unterkiefers darstellt, daneben in entsprechender Entfernung als Spuren der zwei vordersten Zähne die tiefen Eindrücke ihrer Spitzen und neben diesen fast ebenso tiefe Grübchen, die einer Aufblähung um die Alveolen dieser beiden Zähne auf der lingualen Seite der Mandibel entsprechen dürften. Als Fortsetzung der Zahnreihe lassen sich noch 6 in etwa gleicher Entfernung voneinander befindliche nadelstichartige Eindrücke zum Teil von äußerster Feinheit bemerken, die eine nahezu gerade Reihe bilden,

die zwischen den zwei hinteren Zähnen des Maxillare endet. Es sind das zweifellos die Eindrücke der übrigen Zahnspitzen des rechten Unterkiefers, die in etwas verschiedener Höhe gelegen sein mußten. Von diesen 6 hinteren Zähnen ist am linken Unterkiefer keine Spur mehr nachzuweisen, auch ist nichts von einer Aufblähung ihrer Alveolen zu bemerken, die im Unterkiefer aber auch nicht auf der labialen Seite, die allein vorliegt, zu erwarten wäre. Die Symphyse des Unterkiefers ist etwa 5 mm von der geraden Linie entfernt, die durch die Spitzen der 6 hinteren Zähne festgelegt ist. Die beiden Unterkieferäste bilden daher vorn einen ziemlich breiten Bogen miteinander und sind nur in einer ganz kurzen Symphyse miteinander vereinigt, die vor dem ersten Zahn deutlich vorspringt. Es ist mit Sicherheit anzunehmen, daß auch die beiden Zwischenkiefer eine breite abgerundete Schnauze miteinander bilden dürften. Von den bestimmbaren Knochen des Schädels ist der wichtigste und am deutlichsten erhaltene das linke Maxillare in einem sehr wahrscheinlich ganz vollständigen Abdruck seiner Außenseite. Es erscheint als eine ungefähr dreieckige, stark gewölbte Platte von 10 mm Länge, die dorsal in einen 9.5 mm hohen, 1—1.5 mm breiten, zungenförmigen, fast senkrecht stehenden Fortsatz ausläuft, der den Flugfinger überkreuzt. Die Entfernung seines Unterrandes bis zum Ende des Fortsatzes beträgt 15 mm. Senkrecht oder kaum merklich nach hinten geneigt stehen auf dem Unterrand in annähernd gleichen Abständen 4 schlanke, spitze, fast gerade Zähne von durchschnittlich 2 mm Höhe, die beiden mittleren unmerklich kräftiger als die äußeren. Ihre Alveolen bilden auf der Außenwand des Knochens kräftige Aufblähungen. Der vor dem aufsteigenden Fortsatz liegende Teil des Maxillare ist kürzer als der hintere, infolgedessen ist die am Hinterrand entstandene Einbuchtung des Maxillare, die den vorderen Teil der Präorbitallücke bildet, beträchtlich tiefer als die Einbuchtung des Vorderrandes, die die Nasenöffnung hinten begrenzt.

An das oberste Ende des Maxillarfortsatzes stößt ein von hinten her sich erstreckender schmaler zungenförmiger Abdruck eines Knochens von 10 mm Länge, des Nasale, der oberhalb der Orbita in einen ebenfalls etwa 10 mm langen, aber viel breiteren Abdruck eines Knochens übergeht, der eine große und sehr tiefe

Mulde in der Platte veranlaßt, und den ich für das kräftige, über die Orbita ragende Frontale ansehe. Ein dreischenkliger, tatsächlich vorhandener Knochen am oberen Vorderrand der Orbita ist wohl als Adlacrymale zu deuten; seinem unteren Schenkel kommt ein Knochen entgegen, der als der aufsteigende Ast des Jugale anzusehen ist, dessen Körper vielleicht durch das Bruchstück eines kräftigen Knochens am Unterrand der Orbita dargestellt wird. Ist die Deutung dieser Knochen richtig, dann sind sie sämtlich aus ihrer natürlichen Lage zueinander gar nicht oder nur ganz unbedeutend verschoben.

Der merkwürdigste unter diesen Schädelknochen ist das Maxillare, das auffallend kurz ist, nur 4 Zähne trägt und einen fast senkrecht aufsteigenden Fortsatz besitzt. Daß es sich nicht um ein Prämaxillare handeln kann, geht abgesehen von seiner Lage zu den anderen Knochen besonders daraus hervor, daß der Vorderrand eine deutliche Einbuchtung zeigt, die bei einem Prämaxillare nicht erklärlich wäre. Die übrigen Rhamphorhynchoidea, deren Schädelbau bekannt ist, zeigen sämtlich ein sehr viel längeres Maxillare mit 5—9 Zähnen und einen verhältnismäßig kurzen aufsteigenden Fortsatz, der in ausgesprochener Weise schräg nach hinten gerichtet ist. Diese Formen besitzen aber auch sämtlich eine bemerkenswert lange Schnauze und eine Präorbitallücke, die mindestens so lang, meist aber beträchtlich länger als hoch ist. Unser *Anurognathus* kann aber nur eine kurze, dabei aber verhältnismäßig hohe Präorbitallücke besessen haben, und auch die Nasenöffnung muß kurz und hoch gewesen sein. Es dürfte eine ausgesprochen kurz- und hochschnauzige Form gewesen sein, die nur 4 Zähne im Maxillare und wahrscheinlich wie die sämtlichen bekannten Rhamphorhynchoidea ebenfalls 4 Zähne im Prämaxillare gehabt hatte. Am nächsten von diesen steht dem *Anurognathus* wohl *Scaphognathus crassirostris* in dieser Beziehung mit nur 5 Maxillarzähnen, der ebenfalls nur aufrecht stehende Zähne in der breit abgerundeten Schnauze zeigt, was auch bei *Dimorphodon* der Fall ist. Doch ist auch bei diesen Formen die Verlängerung der Schnauze außerordentlich viel größer als bei *Anurognathus*. Bei den anderen Rhamphorhynchoidea endet die Schnauze spitz, und bei *Rhamphorhynchus* und *Dorygnathus* sind die vorderen Zähne mit der Spitze nach vorn gerichtet.

Der präorbitale Teil des Schädels, also die Schnauze von *Anurognathus* dürfte kaum die Länge des hinteren Schädels gehabt haben im Gegensatz zu allen anderen Pterosauriern, deren Schnauze den hinteren Schädel weit an Länge übertrifft, meist um das Doppelte (bei Pterodactyloidea oft noch länger). Nur bei *Scaphognathus* und *Campylognathus* (auch *Criorhynchus*) erreicht sie nicht die doppelte Länge (Arthaber 1919, Studien über Flugsaurier in Denkschr. Ak. Wiss. Wien Bd. 97 und Arthaber 1921, Entwicklung, Ausbildung und Absterben der Flugsaurier in Paläont. Zeitschr. Bd. 4).

Alle die Annahmen, die ich mit der Gestalt des Maxillare bei *Anurognathus* glaube begründen zu können, werden nun durchaus bestätigt durch das, was über die Gestalt des Unterkiefers festgestellt werden kann. Auch die Ausmessungen des Unterkiefers und dessen Bezahnung lassen eine kurz-, aber breitschnauzige Form annehmen, die nicht mehr als 8 Zähne jederseits im Ober- und Unterkiefer besaß, die alle aufrecht in ungefähr gleicher Entfernung voneinander standen. Die vorderen Zähne waren nicht stärker als die hinteren im Gegensatz zu allen anderen Rhamphorhynchoidea. Zu den bekannteren Pterodactyloidea ergaben sich gar keine näheren Beziehungen.

So erscheint der Kopf von *Anurognathus* (Fig. 2) durchaus fremdartig unter den Pterosauriern, speziell auch unter den Rhamphorhynchoidea (*Ptenodraco* halte ich für jugendliche Exemplare mit noch nicht entwickelter Schnauze). Trotz seiner kurzen Schnauze erscheint der Schädel von Anurognathus aber doch verhältnismäßig sehr groß, besonders auch wegen seiner bedeutenden Höhe. Er ist so lang wie der Rumpf (bzw. Rumpfwirbelsäule), seine relative Länge ist also gleich 1 zu setzen, ein Verhältnis, das bei den meisten Rhamphorhynchoidea ungefähr das gleiche ist (1 bis 1.2); bei *Rhamph. longicaudus* beträgt sie 0.9, bei *Dimorphodon* 1.4; letzterer besitzt den relativ längsten Schädel unter allen Rhamphorhynchoidea. Bei *Pterodactylus* ist die relative Schädellänge 1.5—1.6 (*Pt. elegans* 1.1, *micronyx* 1.3, *longirostris* 1.9), bei *Pteranodon ingens* beträgt sie 2 (ohne den Hinterhauptskamm).

Eine relative Schädellänge, die der von *Anurognathus* ungefähr entspricht, besitzt von Vögeln u. a. die Lachmöve, Amsel,

Rabenkrähe, Schwarzspecht, Turmsegler. Auch unter den Chiropteren, die im allgemeinen einen relativ kurzen Schädel haben (0.4—0.7) gibt es Formen, die darin dem *Anurognathus* ähnlich werden, wie *Phyllostoma perspicillatum* mit einer Schädellänge von 0.9. Der Schädel dieser Art hat übrigens eine unverkennbare Ähnlichkeit mit dem des *Anurognathus*, was bei der Frage nach der Ernährungsweise dieser Form nicht übersehen werden darf.

4. Wirbelsäule (Fig. 4 und 5).

Die Wirbelsäule war ursprünglich in ungestörtem Zusammenhang vollständig erhalten gewesen, aber jetzt größtenteils nur als Abdruck in Form einer tiefen Rinne erkennbar; wo darin noch Reste der Wirbel vorhanden sind, bestehen sie aus kristallinischem Kalkspat; nur selten lassen sich noch einige Einzelheiten erkennen. Sie bestand vermutlich aus 36 Wirbeln, und zwar wahrscheinlich 8 Halswirbeln, deren letzter eine rudimentäre Rippe trägt, 10 Rückenwirbeln mit wohl entwickelten Rippen, 2 Lendenwirbeln mit kräftigen Querfortsätzen, wahrscheinlich 5 Sakralwirbeln und 11 Schwanzwirbeln.

Die Zahl der Halswirbel scheint bei den Pterosauria in der Regel 8 zu sein, mitunter werden 7 angegeben, bei *Pteranodon* 9. *Dimorphodon* und *Scaphognathus* besitzen 12, *Dorygnathus* und *Rhamphorhynchus* 13 Rückenwirbel, dazu 2 Lendenwirbel und 4 Sakralwirbel (*Rh. longicaudus* 3 oder 4). Während also *Anurognathus* vermutlich nur 17 Rumpfwirbel besitzt, haben die übrigen Rhamphorhynchoidea deren 18—19. Diese Anzahl scheint auch die Regel bei *Pterodactylus* zu sein, während *Nyctodactylus* nur 16, *Pteranodon* dagegen 22 Rumpfwirbel zeigen soll.

Die Halswirbel sind wie bei allen Pterosauria beträchtlich größer als die Rumpfwirbel, im Gegensatz zu diesen ohne erkennbaren oberen Dornfortsatz, die vorderen 5 mm hoch. Wie bei allen Rhamphorhynchoidea sind sie nicht länger als hoch im Gegensatz zu den Pterodactyloidea. Der Atlas war wohl dem der Krokodile ähnlich, wenigstens läßt sich dorsal der Abdruck einer den zweiten Halswirbel überdeckenden Spange erkennen, die eine der Postzygapophysen des oberen Bogens darstellen könnte. Ein schmaler ventraler Fortsatz am Atlas ist vielleicht als Hypapophyse zu deuten. Weitere Einzelheiten waren nicht zu ermitteln.

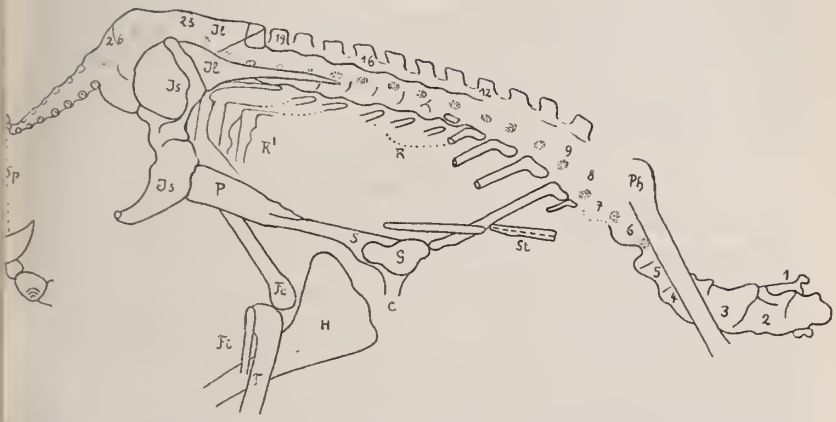


Fig. 4. Wirbelsäule und Rumpf. *C* Coracoid. *Fe* Femur. *Fi* Fibula. *G* Schultergelenk. *H* Humerus. *Il* Ilium. *Is* Ischium. *P* Pubis (Epipubis). *Ph* 1. Phalange des Flugfingers. *R* Rippen, proximal. *R'* Rippen, distale Verbreiterung. *S* Scapula. *Sp* Schwanzspitze, daneben vergrößert. *St* Sternum. *T* Tibia.

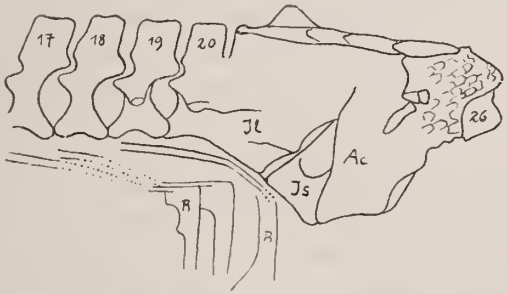


Fig. 5. Sakraler Teil des Rumpfes von der linken Seite (war in der Platte eingeleimt) nebst letzten Rippen. 17, 18 letzte Rückenwirbel. 19, 20 2 Lendenwirbel. 26 erster Schwanzwirbel. *Ac* Acetabulum. *Il* Ilium, acetabularer Teil. *Is* Ischium, ebenso. *R* Verbreiteter Teil der letzten 3 Rippen.

Von Halsrippen ist nichts zu sehen mit Ausnahme des letzten Halswirbels, der unverkennbar eine feine 3 mm lange doppelköpfige Rippe zeigt. Die gesamte Länge der 8 Halswirbel beträgt 28 mm, ihre relative Länge (Rumpf = 1) beträgt 0.62, bei den anderen Rhamphorhynchoidea 0.56—0.86, bei den Pterodactyloidea 0.9—1.9, bei den verglichenen Vögeln 0.9—1.5, bei Chiropteren 0.23—0.4.

Die darauf folgenden 12 Wirbel sind beträchtlich kleiner, sämtlich von ungefähr gleicher Größe und Gestalt, und nehmen von vorn nach hinten nur ganz unmerklich etwas an Größe ab; ihre Gesamtlänge beträgt 33 mm, von denen 5 mm auf die zwei Lendenwirbel kommen, ihre Höhe einschließlich des 1.9 mm hohen oberen Dornfortsatzes 5 mm. Dieser Dornfortsatz ist bei allen Rumpfwirbeln gleich hoch, bei den drei letzten quadratisch, bei den übrigen etwas nach hinten geneigt, stets etwa so lang als hoch. Die Wirbelkörper selbst sind offenbar sehr niedrig, so daß die Wirbel wesentlich aus den oberen Bogen bestehen. Das läßt sich aus den sehr weiten Intervertebrallücken schließen, die man an den Lendenwirbeln beobachten kann, bei denen noch die äußerste Knochenschichte vorhanden und noch nicht in Kalkspat verwandelt ist. Bei sämtlichen 10 Rückenwirbeln sind wenigstens proximale Teile von freien Rippen festzustellen, die sich bis zum ventralen Rand ihrer Wirbel verfolgen lassen. An den beiden Lendenwirbeln ist sehr deutlich ein kräftiger Querfortsatz zu beobachten.

Von Sakralwirbeln möchte ich 5 annehmen; sie sind aber sämtlich in der Masse reinen Kalkspats aufgelöst, die die Stelle der Beckenregion einnimmt. Von den einzelnen Wirbeln ist keine sichere Spur mehr aufzufinden, nur einige schwache narbenartige Eindrücke in der Mulde, die das Becken aufnahm, lassen sich vielleicht als Andeutungen von Querfortsätzen der Sakralwirbel ansehen und ihre Zahl auf 5 festsetzen. Sie nehmen zusammen eine Länge von 12 mm ein, so daß die gesamte Rumpflänge vom 1. Rückenwirbel bis zum letzten Sakralwirbel 45 mm mißt. Der dorsale Rand der oberen Dornfortsätze der Sakralwirbel liegt im gleichen Niveau wie der der Rücken- und Lendenwirbel.

Eine der auffallendsten Erscheinungen, die *Anurognathus* zeigt, ist der kurze, nur aus 11 Wirbeln bestehende Schwanz von

nur 14 mm Länge, während alle anderen Rhamphorhynchoidea sich gerade durch ihren langen wohlentwickelten Schwanz gegenüber den stummelschwänzigen Pterodactyloidea auszeichnen. Während aber bei diesen der Schwanzstummel stets sehr dünn und verhältnismäßig zart ist, zeichnet er sich bei *Anurognathus* durch seine kräftige kegelförmige Gestalt aus mit deutlichen oberen und unteren Apophysen. Es ist wohl als sicher anzunehmen, daß die Verkümmerung des Schwanzes bei *Anurognathus* unabhängig von den Pterodactyloidea eingetreten ist.

In der Kalkspatmasse, die an Stelle der Beckenregion noch vorhanden ist, ist der erste Schwanzwirbel noch zu erkennen als formloses Stückchen, das hinten an der Ventralseite des Kreuzbeins befestigt ist; hier ist der Schwanz unter einem Winkel von etwa 45° ventralwärts von der Rumpfwirbelsäule abgeknickt. Während dieser und der zweite Schwanzwirbel keine bemerkenswerten Eindrücke von Fortsätzen auf der Platte hinterlassen haben, ist von den darauf folgenden 7 Schwanzwirbeln jeder einzelne gekennzeichnet durch einen stärkeren ventralen und einen schwächeren dorsalen, warzenförmigen Fortsatz, die einen deutlichen Eindruck hinterlassen haben in Form von tieferen und seichteren Grübchen in regelmäßigen Abständen. Die Gesamtlänge dieser 7 Schwanzwirbel beträgt 9.5 mm; dieser Teil des Schwanzes verjüngt sich nach hinten zu gleichmäßig. Beim ersten dieser 7 Wirbel beträgt seine Dicke noch 3 mm, beim letzten nur noch 1 mm. Die Reihen der dorsalen und ventralen Grübchen konvergieren nach hinten in ausgesprochener Weise, so daß sie sich zuletzt fast berühren. Dieser Schwanzstummel ist konisch, endet aber in einem kleinen aufwärts gekrümmten Häkchen, in welchem ich zwei weitere Wirbel zu erkennen glaube. Der vorletzte Wirbel ist von winziger Größe, der letzte aber wieder vergrößert, von herzförmiger Gestalt mit aufwärts gerichteter Spitze. So erinnert er etwas an das Pygostyl der Vögel, das aber als wohl entwickelter wichtiger Träger der Steuerfedern bei den Vögeln eine ganz andere Rolle spielt als der winzige einfache letzte Schwanzwirbel des *Anurognathus*, dem eine besondere Bedeutung nicht zugesprochen werden kann.

5. Rippen (Fig. 4 und 5).

Nur am letzten Halswirbel kann eine Rippe nachgewiesen werden von nur 3 mm Länge, sehr fein und deutlich doppelköpfig. An den sämtlichen 10 Brustwirbeln lassen sich Rippen oder deren Eindrücke wenigstens in Bruchstücken erkennen. Von ihnen ist nur die erste Rippe vollständig erkennbar; sie ist groß und kräftig, 15 mm lang, 1.3 mm breit, flach und nahezu gerade. Die folgenden nehmen allmählich an Stärke ab. Von ihnen sind nur proximale Teile zu beobachten. Die 4 ersten Brustwirbel besaßen, wie sich deutlich feststellen läßt, zweiköpfige Rippen; bei der ersten ist der Hals des Capitulum kurz und kräftig, bei den folgenden wird er länger und schlanker; an der 3. Rippe ist er 2.5 mm lang. Es scheint, daß auch noch einige der folgenden Rippen doppelköpfig waren; deutlich nachzuweisen sind bei ihnen nur proximale Teile des Rippenkörpers, die sich bei den 3 letzten Rippen bis zum unteren Hinterrande der Wirbel verfolgen lassen.

Die 10. Rippe bildet einen schlanken, zuerst geraden, hinten etwas gebogenen Stab von 7 mm Länge, der bis zum Beginn des Ischium sich erstreckt und dort plötzlich in eine ventralwärts verlaufende breite, äußerst dünne Platte von etwa 5 mm Länge übergeht, die unten breiter, aber undeutlich wird und sich im Gestein verliert. Ähnlich scheinen sich auch die beiden vorhergehenden Brustrippen zu verhalten. Denn parallel zu der breiten Platte der 10. Rippe finden sich vor ihr noch zwei weitere ähnliche Platten, deren oberer Rand einen sehr schlanken nach vorn gerichteten Stab entsendet, der, wie ich vermute, als das distale Ende des schlanken Teils der 8. und 9. Rippe anzusehen ist, deren ebenfalls vorhandener proximaler Teil die Richtung nach diesen merkwürdigen Platten nimmt. Diese sind in ihrem obersten Teile so breit (2 mm), daß sie aneinander stoßen, nach unten werden sie nur halb so breit und zeigen, besonders die vorderste, an ihrem Vorderrande einige Einbuchtungen. Sie liegen fast senkrecht zur Wirbelsäule; ihre ventrale Fortsetzung ist unbekannt. Ich vermute, daß es sich um die distalen Abschnitte der Rippen handelt, die hier plattenförmige Ausbildung erlangen, wie es in etwas weniger ausgesprochenem Grade bei der lebenden Hatteria zu beobachten ist. So werden ja auch, und wie ich mich überzeugt

habe, mit Recht die merkwürdigen zackigen Gebilde bei Rhamphorhynchus gedeutet.

Zwei Knochenbruchstücke, über die nichts bemerkenswertes zu sagen ist, dürften die einzigen Reste sein, die vom Sternum zu beobachten sind.

6. Schultergürtel (Fig. 4).

Vom Schultergürtel ist sehr deutlich das linke Schultergelenk festzustellen, das mit der daran hängenden Vorderextremität etwa 20 mm ventral- und kaudalwärts sich verschoben hat. Die Gelenkfläche selbst war durch Kalkspat deformiert; ihre Ränder sind aber unverändert und an den Wänden ist noch spongiöser Knochen sichtbar. Das Gelenk selbst ist 5 mm lang und 4.5 mm hoch. Vom Gelenk aus erstreckt sich ein kräftiger, tadellos erhaltener Knochen mit weiter pneumatischer Höhle nach hinten; er stellt offenbar die Scapula dar, deren deutlich konkave innere Seite jetzt auf der Platte frei gelegt ist. Aber vergebens bemühte ich mich, das hintere freie Ende dieser Scapula festzustellen. Anscheinend ohne jede Grenze geht dieser Knochen in einen ihm vom Becken her entgegen kommenden, ebenso starken Knochen über, der nur als Pubis (Epipubis) angesehen werden kann. Der ganze balkenförmige Knochenzug weist ja verschiedene Verletzungen auf, aber überall ist doch der Zusammenhang deutlich zu übersehen, und nirgends ist eine Stelle zu bemerken, die als Grenzmarke zwischen den von beiden Seiten her übereinander geschobenen Knochen angesehen werden könnte. Die Scapula ist auf keinen Fall kürzer als 13 mm. Sie besitzt am Rande des Gelenks eine Breite von 3 mm, weiter außen von $1^1/_2$ mm. Das Coracoid, dessen Beginn am Gelenk sichtbar ist, ist mit der Gegenplatte verloren gegangen, in der sich auch der rechte Schultergürtel befinden muß. So weit der Schultergürtel von *Anurognathus* sich beurteilen läßt, stimmt er mit dem der anderen Rhamphorhynchoidea überein.

7. Becken (Fig. 4 und 5).

Vom Becken ist der sakrale und acetabulare Teil zu einer kompakten durchscheinenden Masse von Kalkspat umgewandelt, der nur an einigen Stellen noch Reste von Knochen erkennen läßt.

Doch scheint die Oberfläche der linken Seite, die in die Mulde auf der Platte paßt, mit Ausnahme des ganz unkenntlichen Acetabulum die ursprüngliche Gestalt behalten zu haben.

Vom Acetabulum aus erstreckt sich das Ilium in der Höhe der Wirbelkörper gerade nach vorn in einen dreieckigen Fortsatz, der mit seiner spießartig verlängerten Spitze etwa bis zur Mitte des 9. Rückenwirbels reicht. Ein zweiter, kürzerer dorsaler Fortsatz des Ilium reicht bis zum Vorderrand des oberen Dornfortsatzes des zweiten Lendenwirbels, während der einspringende Winkel zwischen diesen beiden Fortsätzen des Vorderrandes bis etwa zum Hinterrand des 1. Sakralwirbels zu reichen scheint. Das Ilium scheint die sämtlichen Sakralwirbel und den Dornfortsatz des 2. Lendenwirbels von der Seite mantelförmig bis zum Dorsalrand ihrer oberen Dornfortsätze umhüllt zu haben. Den Dornfortsätzen schmiegte er sich eng an, so daß der dorsale Teil des Beckens ein kielförmiges Aussehen erhielt. Nur der Dorsalrand der oberen Dornfortsätze trennt noch die beiderseitigen Ilia voneinander. Der Mantel, den die beiden Ilia bildeten, scheint bis zum 1. Schwanzwirbel gereicht zu haben. Nur der präacetabulare untere Teil mit dem spießförmigen Fortsatz ist noch als Knochen vorhanden, sowie kleine Bruchstücke längs des Dorsalrandes der oberen Dornfortsätze und der fast gürtelförmige Mantel um die letzten Sakralwirbel. Dieser Teil der Oberfläche des Ilium bietet ein mosaikartiges Aussehen, das aber vielleicht der Umwandlung in Kalkspat zuzuschreiben ist. Eine derartige mantelartige Umhüllung des ganzen Sakrums bis zum Rand der Dornfortsätze findet sich in ganz ähnlicher Weise auch bei gewissen Vögeln, am auffallendsten etwa bei *Apteryx*. Unter den Pterosauria zeigt nur *Pteranodon* ein Ilium, das in seinem präacetabularen Teil einige Ähnlichkeit mit dem von *Anurognathus* besitzt, da auch hier zwei nach vorn gerichtete Fortsätze vorhanden sind; doch ist bei *Pteranodon* der obere ebenso lang wie der untere.

Nur die präacetabulare Naht zwischen Ilium und Ischium ist deutlich zu beobachten, und hier läßt sich auch beim Ischium noch der Knochen erkennen. Die ventralen Teile des Ischium sind nur in Abdrücken vorhanden, die zeigen, daß es sich als flache, ungefähr dreieckige Platte mit konkavem Hinterrand nach unten und rückwärts erstreckte, ohne daß die Symphyse beobachtet

werden konnte. Dieser flache Teil des Ischium hatte eine Länge von 8.5 mm bei einer Breite von 3 mm in seiner proximalen Hälfte. An den Vorderrand des flachen Teils des Ischium stößt mit einer in nicht sehr deutlichen Spuren sichtbaren Naht ein flacher, gerade nach vorn gerichteter Knochen, der stellenweise noch vorhanden ist und dann eine weitmaschige Spongiosa zeigt. Er entspricht dem Pubis (Epipubis) der Krokodile. Bei seinem Ansatz am Ischium 2.5 mm breit verjüngt er sich allmählich auf 1.5 mm und geht, wie oben erwähnt, unmerklich über in die ihm von vorn entgegenkommende Scapula; er muß mindestens eine Länge von 10 mm haben; sein vorderes Ende ist aber nicht festzustellen.

Das Ischium läßt sich auf das anderer Pterosaurier zurückführen, nur ist sein dorsaler Teil unterhalb des Acetabulum auffallend schmal und hoch; auch das Epipubis scheint noch in den Rahmen der bei Pterosauriern vorhandenen Ausbildungen zu fallen.

8. Bauchrippen (Fig. 1).

Ventral von Ischium und Pubis sind, regellos durcheinander geschoben, eine Anzahl von Bauchrippen zu erkennen. Jede bestand wie gewöhnlich nur aus dem winkelförmig geknickten Mittelstück und jederseits einer seitlichen Spange. Aus ihrer spärlichen Zahl läßt sich schließen, daß jedenfalls nicht mehr als 6 solcher Gastralia vorhanden waren. Sie sind wie der Schultergürtel ein Stück nach rückwärts verschoben. Diese Knochen sind ganz solid, und ihnen fehlt jede Spur einer Spongiosa bzw. pneumatische Räume, die sonst in fast allen Knochen sich finden.

Ich muß übrigens darauf aufmerksam machen, daß nicht nur in älteren Schriften über Pterosauria, sondern auch in allerneuesten Schriften die Bauchrippen (Gastralia, Parasternum) nicht genügend scharf von den wahren Rippen unterschieden werden. Letztere sind einschließlich des Sternum Anhangsgebilde der Wirbel, gehören daher zum Innenskelett und werden knorpelig angelegt. Die Bauchrippen sind dagegen reine Hautverknöcherungen, an denen niemals Knorpel auftritt, und die auch niemals mit den wahren Rippen des Innenskeletts in engere Verbindung treten, sondern nur oberflächlich ihnen aufliegen (Voeltzkow u. Döderlein 1901, Zur Frage nach der Bildung der Bauchrippen. Abhandl. Senckenberg. nat. Ges. Bd. 26, p. 315 u. 329). Die Homologie der Bauchrippen

und des Bauchpanzers der Stegocephalen habe ich an der Hand des in obiger Abhandlung abgebildeten Materials besonders von Archegosaurus und Hatteria (l. c. 1901, Taf. 31) zuerst festgestellt und Dezember 1889 veröffentlicht (Steinmann u. Döderlein 1890, Elemente der Paläontologie, p. 600, 618, 620, Fig. 759). G. Baur hatte noch vor dem Erscheinen dieses Lehrbuchs unter anderem auch diese Tatsache, die ich ihm bei seinem Besuche in Straßburg unter Vorlegung meines Materials mitgeteilt hatte, veröffentlicht (1889, Amer. Journ. Sc. and Arts, Vol. 37, p. 312).

In meinen beiden oben erwähnten Schriften gab ich Abbildungen der Bauchrippen eines schönen Exemplars von *Pterodactylus spectabilis* aus der Beneckeschen Sammlung in Straßburg (1890, l. c., Fig. 796; 1901, l. c., Taf. 26, Fig. 5). Die Bauchrippen der Pterosaurier sind stets spangenförmig mit spitzen Enden. Die bei verschiedenen Pterosauriern beobachteten platten gezackten oder gezähnten Gebilde sind die distalen Teile der wahren Rippen wie bei *Hatteria*, die zum Teil noch aus Knorpel bestanden haben dürften und nur gering verkalkt waren, und haben mit Bauchrippen (parasternale Elemente) nichts zu tun.

9. Vorderextremität (Fig. 6).

Das Skelett beider Vorderextremitäten ist ziemlich vollständig und im Zusammenhang erhalten, und nur die äußeren Flugfingerphalangen fehlen. Doch sind die Gelenke vielfach durch Kalkspat so zerstört, daß hier oft die Umrisse der Knochen nicht mehr kenntlich sind.

Der linke Humerus ist fast vollständig erhalten; er ist 31 mm lang, sein proximales Ende ist etwa 10 mm breit, sein distales 6 mm; der Schaft ist in der Mitte 2 mm dick. Es ist der kräftigste Knochen des ganzen Skeletts. Der Humerus ist bei *Anurognathus* verhältnismäßig viel länger als bei irgend einem der übrigen Pterosaurier. Seine relative Länge beträgt 0.69 (Rumpf = 1), während sie bei den übrigen Rhamphorhynchoidea zwischen 0.4 (*Rhamphorhynchus* und *Dorygnathus*) und 0.54 (*Dimorphodon*) schwankt. Bei Pterodactyloidea beträgt sie 0.5—0.62, bei den meisten Vögeln und Chiroptera 0.6—1.2. Aber zwei der vorzüglichsten Flieger zeigen Extreme, *Cypselus* 0.35 und *Diomedea* 1.5.

Die Breite des Humerus bei *Anurognathus* nahe dem Schultergelenk ist kaum der dritte Teil seiner Länge, wie das nur bei *Dimorphodon* und einigen Arten von *Pterodactylus* der Fall ist, während sie bei allen übrigen Pterosauria mehr als $^2/_5$ der Länge beträgt infolge mächtiger Entfaltung der Muskelleisten, bei den Arten von *Rhamphorhynchus* sogar über die Hälfte der Länge des Humerus.

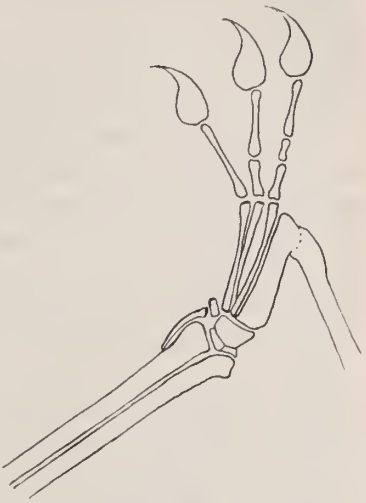


Fig. 6. Linke Hand.

Radius und Ulna erscheinen gleich lang und gleich dick, in ihrer ganzen Länge nahe aneinander geschmiegt. Der Radius ist 46 mm lang, am proximalen Ende sind beide zusammen 5.5 mm breit, am distalen 6.5 mm, in der Mitte ihrer Länge erreichen sie eine Breite von 2.5 mm, jeder von ihnen ist hier 1.1 mm breit; das distale Ende des Radius ist verbreitert, das der Ulna kugelförmig. Die Länge des Radius übertrifft die des Humerus um die Hälfte, ungefähr wie bei den meisten anderen Pterosauriern, bei *Scaphognathus* mißt der Unterarm fast das Doppelte des Humerus, während er bei *Dimorphodon, Campylognathus* und *Pterodactylus scolopaciceps* nur wenig länger ist als dieser. Bei den Vögeln ist er meist ein wenig länger, manchmal etwas kürzer als der Humerus, bei *Cypselus* und den Chiropteren ungefähr um die Hälfte länger. *Anurognathus* hat unter allen Pterosauriern den relativ längsten Radius; er ist so lang wie der Rumpf, bei den übrigen Pterosauriern mißt er 0.6—0.9 (Rumpf = 1).

Der Carpus von *Anurognathus* ist 5 mm breit, auf der radialen Seite 3 mm lang, auf der ulnaren 4 mm. Nach den Eindrücken zu schließen, die die auf der rechten Hand fehlenden Carpalia hinterlassen haben, war ein großes distales Carpale vorhanden, das allein sämtliche 4 Metacarpalia trägt, und das von Radius und Ulna durch zwei niedere, nebeneinander liegende proximale Carpalia getrennt ist. Auf der radialen Seite des großen distalen

Carpale ist ein kleines, frei vorstehendes Carpale vorhanden, an das der dünne, am freien Ende abgestutzte und etwas gebogene Spannknochen sich stützt, der sich in seiner ganzen Länge von 6.7 mm dem Ende des Radius anlegt.

Der Carpus von *Anurognathus* hat daher etwa den gleichen Bau, wie ihn für *Dorygnathus* Stieler (1922, Naturwiss. Wochenschrift, p. 276, Fig. 3) darstellt. Der Spannknochen ist wie bei allen Rhamphorhynchoidea sehr kurz und stumpf, während er bei allen Pterodactyloidea viel länger wird und spitz endet. Bei einigen Arten (z. B. *Pterodactylus suevicus*) soll er aus zwei getrennten Knochen bestehen, von denen der proximale kurz, der distale lang und spitz ist, der damit dem einfachen Spannknochen anderer Pterodactyloidea gleicht. Sollte nun dieser proximale Spannknochen nicht vielleicht das Carpale darstellen, das bei unserem *Anurognathus* an der linken Hand deutlich aus der Reihe der übrigen Carpalia herausragt und als Träger des wahren Spannknochens dient? Diese Ansicht könnte eine Unterstützung erfahren durch das Verhalten des Spannknochens an der rechten Hand von *Anurognathus*, dessen Carpus hier durch Kalkspat völlig unkenntlich ist. Neben dieser Kalkspatmasse liegt nun deutlich an der Stelle, wo der Spannknochen zu erwarten ist, ein stabförmiger Knochen von 3.5 mm Länge, und an seinem Ende ist der Abdruck des wahren Spannknochens zu sehen, der dem der linken Hand völlig gleicht. Dieser Spannknochen hat sich mit dem ihn tragenden Knochen offenbar aus dem Verband des übrigen Carpus gelöst und wurde etwas zur Seite geschoben. Ob nun dieser Knochenstab, der hier den Spannknochen trägt, dem Carpale der linken Hand entspricht, das dort als dessen Träger auftritt, ist nur deshalb zweifelhaft, weil er beträchtlich länger ist. Um aber zu einer sicheren Aufklärung zu kommen, dazu ist das Exemplar nicht geeignet.

Von verschiedenen Autoren wird heute noch der Spannknochen der Pterosaurier als der 1. Finger angesehen und folglich der Flugfinger als der 5. Finger betrachtet, eine Ansicht, die ich früher selbst vertreten hatte. Ich bin aber heute überzeugt, daß der Spannknochen als eine Neuerwerbung zu betrachten ist, und daß der Flugfinger als der 4. Finger anzusehen ist. Ich habe selbst (1890, Steinmann und Döderlein, Elemente der Paläont.,

p. 599) darauf hingewiesen, wie charakteristisch die Phalangenzahl für die verschiedenen Gruppen der Tetrapoda ist. Sie ist auch sehr konstant, und ich habe die Überzeugung, daß die sämtlichen Formen, deren Phalangenzahl auf die Formel 2, 3, 4, 5, 3 (4) zurückzuführen ist, eine geschlossene natürliche Gruppe bilden, und daß die Feststellung der Phalangenzahl unter den sogenannten Theromorpha z. B. von außerordentlicher systematischer Bedeutung sein würde. Abweichungen von der typischen Phalangenzahl treten nur unter ganz besonderen Umständen ein: Hyperphalangie wohl nur bei ausgesprochenen Wassertieren zur Ausbildung von Schwimmfüßen; Reduktion der Phalangenzahl bei Verkümmerung der Füße oder Zehen.

Für die Rhynchocephalia, Lacertilia und Archosauria incl. Aves ist die Formel 2, 3, 4, 5, 3 (4) typisch. Unter den Archosauria herrscht große Neigung zur Verkümmerung der 5., oft auch der 4. Zehe, wobei zunächst die Ausbildung der Hornkralle aufhört. Bei Crocodilia soll die 4. Zehe vorn und hinten nur noch 4 statt 5 Phalangen zeigen. Die Angabe ist unrichtig; es ist das nur bei Museums-Skeletten der Fall. Ich habe bisher aber noch bei jedem Krokodil, das ich daraufhin untersuchte, gleichgiltig von welcher Größe, sowohl an Vorder- wie an Hinterfüßen die sämtlichen 5 Phalangen der 4. Zehe nachweisen können, die letzte Phalange allerdings nicht mehr verknöchert, sondern in knorpeligem Zustand.

Es würde mir nach dem vorhergehenden ganz unverständlich sein, anzunehmen, daß bei der Pterosaurierhand an den 3 wohl entwickelten, noch mit kräftigen Krallen versehenen Fingern je eine Phalange spurlos verschwunden sei, was angenommen werden müßte, wenn diese den 2., 3. und 4. Finger darstellen, und daß dazu obendrein am 5. Finger, nachdem er als erstes Zeichen einer Verkümmerung die Hornkralle eingebüßt hat, eine überzählige Phalange sich eingestellt habe. Und das müßte alles geschehen, nur um den rätselhaften Spannknochen für ein Homologon des Daumens halten zu können.

Die dicht aneinander gedrängten Metacarpalia von *Anurognathus* sind 10.5 mm lang; die drei ersten sind sehr schlank und nehmen in ihrer Mitte zusammen nur eine Breite von 2.6 mm ein, an ihrem distalen Ende, das bei allen verbreitert ist, eine

solche von 4 mm. Das Metacarpale des Flugfingers ist am proximalen Ende 3 mm breit und verschmälert sich etwas in der Mitte, die Umrisse des distalen Endes sind nicht festzustellen. Die Mittelhand ist bei der neuen Art kürzer als bei irgend einer anderen Art der Pterosaurier. Der Radius ist 4.4 mal so lang, während er bei den übrigen Rhamphorhynchoidea nur 2.3—3.5 mal so lang ist wie die Mittelhand. Bei den Arten von *Pterodactylus* ist das Verhältnis gar nur 0.8—1.4 und bei *Pteranodon ingens* nur 0.6.

Die erste Phalange des ersten Fingers ist 8 mm lang, die zwei ersten Phalangen des zweiten Fingers haben 3 und 6 mm, die drei ersten Phalangen des dritten Fingers haben 3, 2, 6 mm. Die Endphalange wahrscheinlich an allen 3 Fingern ist 7 mm lang, stark gekrümmt mit langer feiner Spitze, an der Basis 3 mm hoch und stark komprimiert. Die letzte Phalange, abgesehen von der Endphalange, ist stets die längste, was wohl bei allen Pterosauriern der Fall sein dürfte.

Bei *Anurognathus* sind die sämtlichen Krallenfinger beträchtlich länger als die Metacarpalia, der dritte von ihnen übertrifft sie um $^3/_4$ ihrer Länge. Bei den übrigen Rhamphorhynchoidea ist nur dieser dritte Krallenfinger etwas länger als die Metacarpalia, der erste ist stets beträchtlich kürzer. Bei allen Pterodactyloidea sind sie ja alle viel kürzer als die verlängerten Metacarpalia. Ausnehmend mächtig sind die drei Krallenphalangen bei *Anurognathus* und zwar sehr viel größer im Verhältnis als bei irgend einem anderen Pterosaurier, was auf Hornkrallen von ganz ungewöhnlicher Mächtigkeit schließen läßt. Spuren der Hornkrallen habe ich übrigens noch bei keinem Pterosaurier beobachten können, auch nicht bei dem bekannten Zittelschen Flügel von *Rhamphorhynchus*.

10. Flugfinger (Fig. 1 und 2, vgl. Tabelle).

Die erste Phalange des Flugfingers ist bei *Anurognathus* auf beiden Seiten sehr schön erhalten als schlanker, kaum merklich gebogener Knochen von 59 mm Länge, in seiner Mitte 1.4 mm dick. Sie ist der ganzen Länge nach hohl, die Enden verbreitert, deren Umrisse aber undeutlich. Ihre relative Länge beträgt 1.3 (Rumpf = 1) ähnlich wie bei *Campylognathus Zitteli*, *Rhampho-*

rhynchus kokeni und *Pteranodon ingens*, während sie bei den übrigen Pterosauria geringer ist (0.5—1.1).

Von der zweiten Phalange ist nur links ein 12 mm langes Stückchen erhalten, von dem übrigen Teil des Flugfingers fehlt jede Spur. Ich habe nun versucht, ob sich nicht durch Vergleich mit den anderen Arten eine Regel ergibt, nach der die Gesamtlänge des Flugfingers von *Anurognathus* mit einiger Wahrscheinlichkeit sich berechnen läßt, und glaube, daß es mir gelungen ist.

Danach lassen sich unter den Rhamphorhynchoidea zwei Gruppen annehmen, bei deren erster, aus den kurzflügeligen Gattungen *Dimorphodon*, *Dorygnathus* und *Scaphognathus* bestehend, die erste Phalange des Flugfingers kürzer ist als zwei Dritteile des Rumpfes (relative Länge 0.5—0.6); bei ihnen ist der ganze Flugfinger 4.4—4.7 mal so lang als seine erste Phalange, seine zweite und seine dritte Phalange sind beträchtlich länger (mindestens 15 %) als die erste, und auch die Endphalange ist länger oder fast so lang wie die erste.

Zur zweiten Gruppe, die die Langflügler umfaßt, gehören die Arten von *Rhamphorhynchus* und *Campylognathus*, deren 1. Phalange länger ist als zwei Dritteile der Rumpflänge (0.9—1.4). Bei ihnen erreicht der ganze Flugfinger nur das 3.5—3.8 fache seiner 1. Phalange; die 2. kann ein wenig länger sein, die dritte und vierte ist stets kürzer. Hieher gehört jedenfalls auch *Anurognathus*, und sein Flugfinger dürfte daher etwa 3.7 mal so lang gewesen sein wie seine 1. Phalange, also etwa 218 mm.

Dieser zweiten Gruppe, den langflügeligen Rhamphorhynchoidea ähnlich verhalten sich auch sämtliche Pterodactyloidea, deren erste Phalange stets eine relative Länge von wenigstens 0.7 hat. Diejenigen Arten von *Pterodactylus*, deren 1. Phalange kürzer ist als der Rumpf (*Pt. elegans*, *spectabilis*, *scolopaciceps*, *longirostris*, *kochi*), besitzen einen Flugfinger, der das 3.2—3.4 fache der ersten Phalange, und dessen Endphalange davon das 0.6 bis 0.7 fache mißt; bei anderen Arten, deren 1. Phalange so lang oder länger ist als der Rumpf (*Pt. micronyx*, *longicollum*), beträgt die Länge des ganzen Flugfingers das 2.4—2.6 fache seiner 1. Phalange, und seine Endphalange mißt nur das 0.4 fache von dieser. Ähnlich diesen letzteren verhält sich auch *Pteranodon ingens*, dessen Flugfinger das 2.8 fache der ersten Phalange mißt.

II. Flugfertigkeit (vgl. Tabelle).

Um die Leistungsfähigkeit der Flügel von *Anurognathus* zu beurteilen, kann man die relative Länge des ganzen ausgestreckten Flügels vom Schultergelenk bis zur Spitze des Flugfingers, die 6.8 beträgt (Rumpf = 1), in Vergleich mit anderen Fliegern bringen. Fast die gleiche relative Länge (6.7) kann für *Campylognathus Zitteli* angenommen werden, der bisher unter allen Pterosauriern die längsten Flügel besaß. Bei *Rhamphorhynchus kokeni* ergibt sich 5.9 als Flügellänge, für *Rhamph. gemmingi* und *Campylognathus liasicus* etwa 5, bei den übrigen Rhamphorhynchoidea (*Rhamph. longicaudus*, *Dimorphodon*, *Dorygnathus* und *Scaphognathus*) 4.2—4.5, nur für das Wiener Exemplar von *Dorygnathus* 3.6. Bei den verschiedenen Arten von *Pterodactylus* beträgt die relative Flügellänge 4.2—5, bei *Pteranodon ingens* 6.2.

Unter den Chiropteren findet sich bei *Pteropus edwardsi* und *Phyllostoma perspicillatum* eine relative Flügellänge von 5.3, *Vespertilio murinus* 4.2, *Vesperugo noctula* 4.3. Unter einer Anzahl von Vögeln stellte ich die größte Flügellänge (Schultergelenk bis Spitze der Schwungfedern) fest bei *Caprimulgus* mit 7.2, *Sterna hirundo* 6.7, *Larus ridibundus* und *Sarcorhamphus gryphus* 6.4, *Falco subbuteo* und *Cypselus* 6, *Haliaetus*, *Astur*, *Diomedea* 5.4—5.7, *Corvus corone* 5, *Columba palumbus*, *Dryocopus martius*, *Scolopax* 4.4—4.7, *Turdus merula*, *Tetrao urogallus* und *Cormoranus carbo* 3.7—3.9, *Anas boschas* und *Mergus merganser* 3—3.1. Für *Archaeopteryx* fand ich ebenfalls 3.

Über die Breite der Flügel bei den Pterosauria, die für die Beurteilung der Flugfertigkeit doch eine hervorragende Rolle spielt, wissen wir nur, daß die von *Rhamphorhynchus gemmingi* (inkl. *Rh. phyllurus*) schmal sind wie bei *Cypselus*. Über die sämtlichen anderen Arten mangelt es an jeder sicheren Kenntnis. Wir müssen daher die Beurteilung lediglich auf die Flügellänge stützen.

Es ist nun interessant, festzustellen, daß, wenn nur die relative Flügellänge in Betracht gezogen wird, kein Anlaß vorliegt, die Arten der Gattung *Pterodactylus* als ungeschicktere Flieger aufzufassen wie die der Gattung *Rhamphorhynchus* (*Rh. kokeni* ausgenommen). Wir treffen in beiden Gattungen die Flügellänge 4—5. Dieselbe relative Flügellänge besitzt überhaupt die große

Menge der Pterosaurier und ebenso eine große Anzahl gutfliegender Vögel und wohl auch die große Menge der Chiroptera. *Pteranodon* erreicht die Flügellänge von Seglern, Falken, Kondor, Möven, während *Campylognathus Zitteli* und *Anurognathus* die größte Flügellänge unter den Pterosauria besitzen, damit den Seeschwalben gleichkommen und nur wenig hinter den Nachtschwalben zurückbleiben.

Ein etwas anderes, vielleicht noch treffenderes Bild erhält man, wenn man nicht die ganze Flügellänge, sondern nur den äußeren Abschnitt der Flügel zum Vergleich herbeizieht, der in der Ruhe gegen den Unterarm eingeklappt und bei den Vögeln als „Fittich" bezeichnet wird. Er umfaßt bei Vögeln und Chiroptera die ganze Hand einschließlich des Metacarpus, bei den Pterosauriern besteht er nur aus dem Flugfinger, da hier der Metacarpus praktisch nur zur geradlinigen Verlängerung des Unterarms dient, gegen den er sich auch nur unbedeutend bewegen kann. Die Annahme, daß der Metacarpus fast in einen rechten Winkel zum Unterarm sich stellt, wie sie in neuesten Darstellungen von Pterosauriern sich findet, muß ich für unnatürlich halten.

Berücksichtigt man also nur die relative Länge des Flugfingers bzw. des Fittichs (Rumpf = 1), so erhält man wieder für *Anurognathus* und *Campylognathus Zitteli* die höchsten Werte (5.1—5.3) unter den Pterosauriern, die der Fittichlänge von *Cypselus* und *Caprimulgus* (5) entsprechen. *Rhamphorhynchus kokeni* nähert sich *Sterna* (4.6); *Rhamph. gemmingi, Camp. liasicus* und *Pteranodon* mit 3.8—3.9 nähern sich *Falco subbuteo* und *Larus ridibundus* (4.1), hinter denen die sämtlichen übrigen Raubvögel, Rabenkrähen und Schwarzspecht mit 3.3—3.8 etwas zurückbleiben. *Dimorphodon, Scaphognathus* und *Rhamph. longicaudus* sowie sämtliche Arten von *Pterodactylus* mit 2.4—2.9 kommen den Tauben und Schnepfen nahe (3), sowie den Chiropteren *Pteropus* und *Phyllostoma*. Eine geringere Flugfingerlänge findet sich bei Pterosauriern nicht mehr. Die übrigen Vögel und Chiropteren zeigen 2.2—2.4, die Entenvögel 1.8—1.9, *Archaeopteryx* 1.7. Hier kommt also die Überlegenheit von *Rhamphorhynchus gemmingi* über sämtliche Arten von *Pterodactylus* zum Ausdruck; dagegen kommt *Diomedea* nicht zu ihrem Recht. Dies ist aber auch die einzige

von allen hier berücksichtigten Formen, deren Fittichlänge kürzer ist als der proximale Teil des Flügels.

Es ist interessant, auch dies Verhältnis zu beleuchten. Nimmt man hier als Einheit den proximalen Teil des Flügels, so ergibt sich als relative Länge des Fittichs beim Albatros 0.8, für alle übrigen Vögel 1.4—2.4, nur *Cypselus* zeigt 5.7; *Archaeopteryx* 1.4, alle Chiroptera 1—1.2; sämtliche Pterodactyloidea einschließlich Pteranodon 1.2—1.6; alle Rhamphorhynchoidea ergeben höhere Zahlen, nämlich *Dimorphodon*, *Dorygnathus* und *Scaphognathus* 1.7—2; die übrigen Rhamphorhynchoidea 2.3—2.9, nur *Rhamph. gemmingi* 3.2 und *Camp. Zitteli* 3.7.

12. Hinterextremität (Fig. 7).

Auch das Skelett der Hinterextremitäten von *Anurognathus* läßt sich fast vollständig im Zusammenhang feststellen; doch sind auch hier die Gelenke mehr oder weniger zerstört.

Das Femur dürfte etwa 27 mm lang gewesen sein; auf beiden Seiten ist die proximale Hälfte nicht mehr zu beobachten; in der Mitte war es 1.5 mm dick, am distalen Ende 4 mm. Es ist verhältnismäßig lang unter den Pterosauriern mit 0.6 relativer Länge (Rumpf = 1). Die meisten Arten von *Pterodactylus* nähern sich dieser Größe, eine einzige *Pt. longicollum* hat ein längeres Femur von 0.7; bei sämtlichen Rhamphorhynchoidea ist es wesentlich kürzer; bei *Dorygnathus* und bei allen Arten von *Rhamphorhynchus* ist es besonders kurz (0.3—0.36). Unter den in Betracht gezogenen Vögeln finden sich derartige kurze Femora, wie sie *Rhamphorhynchus* hat, nur bei Schwimmvögeln (Enten, Albatros, Kormoran, Seeschwalbe), während sie bei Landvögeln meist dem von *Anurognathus* und *Pterodactylus* nahe kommen (0.5 — 0.8). Dasselbe gilt auch von den Chiroptera.

Die Tibia von *Anurognathus* war 39 mm lang, in der Mitte ist sie 1.3 mm dick; ihrem proximalen Ende angeschmiegt ist auf eine Länge von 7.7 mm der Abdruck einer sehr dünnen Fibula zu erkennen. Bei sämtlichen Pterosauriern ist die Tibia länger als das Femur im Verhältnis von 1.2—1.6; bei *Anurognathus* ist dies Verhältnis 1.4. Auch bei den Vögeln ist die Tibia stets länger, aber bei den Schwimmvögeln um mehr als die Hälfte, bei

den anderen meist um weniger. Bei den Chiroptera ist sie so lang oder unbedeutend länger als das Femur.

Über die Zahl und Anordnung der Tarsalia ist nichts mehr festzustellen; die erkennbaren Umrisse scheinen die von Kalkspatkrystallen, nicht die der Tarsalia zu sein.

Anurognathus besitzt 5 wohlentwickelte Zehen. Die Metatarsalia der vier ersten Zehen sind lange, sehr schlanke hohle Röhrchen mit etwas verbreiterten Enden, die mittleren 18 mm lang, die äußeren etwas kürzer; sie liegen anscheinend in einer Ebene (bildeten aber wahrscheinlich einen flachen Bogen), ihrer ganzen Länge nach dicht zu einem Bündel aneinander gedrängt und nehmen in ihrer Mitte zusammen eine Breite von 2.7 mm ein, am distalen Ende, wo sie sich etwas auseinander spreizen, eine solche von 5.5 mm. Das 5. Metatarsale ist von seiner Basis an von den anderen abgespreizt; es ist kurz und sehr dick, 4.5 mm lang, am proximalen Ende 2 mm breit, in der Mitte 0.8 mm, am distalen Ende 1.5 mm breit.

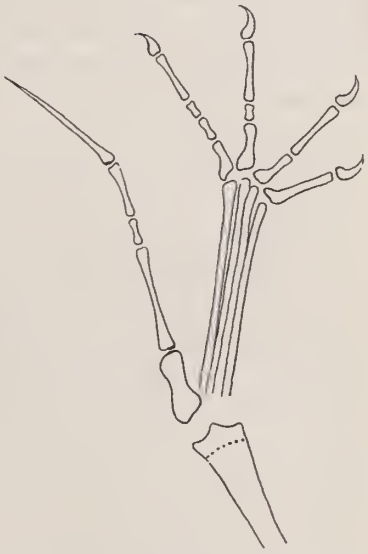


Fig. 7. Rechter Hinterfuß. Die proximalen Tarsalia sind wahrscheinlich mit der Tibia vereinigt, die distalen waren unkenntlich.

Die Länge des Metatarsus ist bei allen Pterosauriern beträchtlich geringer als die des Femur, bei den meisten Formen 0.4—0.6 (Femur = 1), bei *Pter. micronyx* und *longicollum* noch kürzer (0.3). Nur die Arten von *Rhamphorhynchus* besitzen einen verhältnismäßig langen Metatarsus (0.74—0.8). Ihnen nähert sich in dieser Beziehung *Anurognathus* mit 0.67. Bei den Vögeln ist der Lauf fast durchgehends länger als bei den Pterosauria der Metatarsus, meist 0.7—1.3; bei *Tetrao* ist er nur 0.6. Bei Chiroptera ist der Metatarsus sehr kurz (0.2).

Während die 4 Metatarsalia an beiden Füßen von *Anurognathus* eng aneinander gedrängt sind, sind die Zehen selbst weit

voneinander gespreizt, mit 2, 3, 4, 5, 4 Phalangen. Die Krallenphalangen sind etwa 3 mm lang; die vorletzte Phalange ist an allen bekrallten Zehen weitaus die längste wie an den Vorderextremitäten. Die 1. Zehe hat eine Länge von 9 mm, die anderen nehmen an Länge gleichmäßig zu, so daß die 4. etwa 14 mm mißt. Diese ist also kürzer als der Metatarsus, was bei Pterosauria die Regel zu sein scheint; bei Pteranodon ist sie gleich lang. Unter den Vögeln ist fast nur bei Schwimmvögeln die längste Zehe beträchtlich länger als der Lauf.

Die Länge der Phalangen an den einzelnen Zehen ist folgende in mm:

1. Zehe 6, 3 = 9 mm,
2. Zehe 3, 5.5, 3 = 11.5 mm,
3. Zehe 3, 2, 5.5, 3 = 13.5 mm,
4. Zehe 3.5, 2, 1.5, 4.5, 3 = 14.5 mm,
5. Zehe 9, 2.5, 4.5, 12 = 28 mm.

Die 5. Zehe ist mit ihrem Metatarsale weit abgespreizt von den übrigen Zehen. Ihre Endphalange ist krallenlos und läuft in einen lang ausgezogenen, leicht gebogenen, äußerst dünnen Stachel aus. Diese Endphalange ist etwas abgebogen von dem sonst gerade verlaufenden Finger. Die 2. kurze Phalange überkreuzt auf der Platte den Flugfinger und ist weggebrochen. Es könnte bestritten werden, ob eine solche wirklich vorhanden war, oder ob an dieser Stelle das Gelenk zwischen der 1. und 2. Phalange besonders ausgedehnt war. Doch läßt sich deutlich in diesem anscheinend verlängerten Gelenk eine Einschnürung beobachten, die es höchst wahrscheinlich macht, daß tatsächlich hier eine besondere kurze Phalange, wie sie auch an den anderen Zehen vorkommt, vorhanden gewesen war. Am linken Fuß fehlt diese 5. Zehe; es war davon nur das Metatarsale in situ und einzelne Trümmer der langen Phalangen zu beobachten.

Anurognathus ist unter allen Pterosauriern ausgezeichnet durch die ungewöhnliche Länge seiner 5. Zehe, die (ohne Metatarsale) doppelt so lang wird wie die längste der anderen Zehen. Dazu kommt noch die interessante Tatsache, daß sie noch die ursprünglichen 4 Phalangen besitzt wie bei den Rhynchocephalen und Lacertiliern. Die übrigen Rhamphorhynchoidea besitzen gleichfalls eine verhältnismäßig gut entwickelte 5. Zehe, die aber bei

keiner Art mehr als 2 Phalangen besitzt. Auch keine erreicht annähernd die relative Länge dieser Zehe bei *Anurognathus*. Sehr gut entwickelt ist sie bei *Dimorphodon* und *Dorygnathus*; recht kurz ist sie bei *Campylognathus*. Bei den Pterodactyloidea ist sie stets verkümmert und zeigt nur noch eine winzige Phalange.

Sehr bezeichnend für den Fuß von *Anurognathus* ist es, daß die 4 ersten, besonders langen und dünnen Metatarsalia der ganzen Länge nach zu einem Bündel dicht aneinander gedrängt sind und so einen kompakten, schmalen, wahrscheinlich etwas gewölbten Mittelfuß bilden, dessen einzelne Komponenten gegeneinander kaum beweglich waren; die Zehen dagegen sind auffallend gespreizt. Dieser Teil des Hinterfußes erweckt den Eindruck eines digitigraden Fußes, der infolge der Länge und Schmalheit des Metatarsus sich schon einigermaßen zum Springen, bzw. Abschnellen vom festen Boden eignet, um so mehr, als Femur und Tibia auch verhältnismäßig lang sind. Ganz ähnlich gebaut, besonders auch in den Längenverhältnissen auffallend übereinstimmend, ist u. a. das Hinterbein von *Dipodomys kolticus*, einem Springmaus-ähnlichen Nagetier aus der Familie der Geomyidae. Die relativen Längen der einzelnen Beinabschnitte (Femur = 1) sind die folgenden:

Anurognathus: Fem. 1 (27 mm), Tib. 1.44, Metat. 0.63, 4. Zehe 0.5,
Dipodomys: „ 1 (30 mm), „ 1.3, „ 0.63, 4. „ 0.4.

Auch bei Springrüßlern, den *Macroscelididae* findet sich ein ähnlicher Fußbau. Gestört wird aber dieser Eindruck durch die eigentümliche Entwicklung der 5. Zehe bei *Anurognathus*, die bereits vom Tarsus an gegen die anderen Zehen abgespreizt ist, wodurch doch wieder der Charakter eines plantigraden Fußes entsteht. Zwischen allen Zehen bis zu deren Spitze war aber eine Schwimmhaut, oder wohl richtiger Flughaut ausgespannt, deren Spuren deutlich zu erkennen sind.

Denselben Charakter wie *Anurognathus* hatte vermutlich der Fuß aller Rhamphorhynchoidea mit Ausnahme von *Rhamphorhynchus* selbst. Denn bei *Dimorphodon* wie bei den zwei Arten von *Campylognathus*, bei denen der Metatarsus genügend gut erhalten ist, sind die 4 Metatarsalia dicht aneinander gepreßt, aber verhältnismäßig noch kürzer wie bei *Anurognathus*. Auch für *Dorygnathus* muß ich dies annehmen auf Grund der Abbil-

dung von Stieler (1922, Naturwiss. Woschenschrift, p. 275), die eine überraschende Ähnlichkeit mit *Anurognathus* zeigt, obwohl der Verfasser die Metatarsalia gespreizt wiedergibt, vermutlich in Nachahmung der Verhältnisse von *Rhamphorhynchus*. Überraschend ähnlich mit der des *Anurognathus* ist auch die 5. Zehe in dieser Stieler'schen Abbildung. Ich möchte vermuten, daß die Knickung innerhalb der Endphalange bei *Dorygnathus* richtiger als eine Knickung zwischen zwei äußeren Phalangen wie bei *Anurognathus* anzusehen ist, wodurch auch die Phalangenzahl der 5. Zehe mit *Anurognathus* besser übereinstimmen würde.

Der Fuß von *Rhamphorhynchus* selbst hat aber einen ganz anderen Charakter, und darin stimmen alle Exemplare dieser Gattung überein. Hier sind alle im Verhältnis zu dem verkürzten Femur besonders lang erscheinenden 4 Metatarsalia mit ihren Zehen von ihrer Basis an etwas gespreizt und die Zehen bilden ihre geradlinige Fortsetzung; auch die krallenlose 5. Zehe schließt sich ihnen an. Dies ist ein typisch plantigrader Fuß, dessen Zehen wohl auch durch Haut verbunden gewesen sein mögen, und der sich durchaus zum Schwimmfuß eignen würde. Für diese Auffassung spricht die auffallende Verkürzung der Femora, wie sie Schwimmvögeln eigentümlich ist. *Anurognathus* mit seinem langen Femur zeigt durchaus keine Anlage zu einem Schwimmfuß. Aus demselben Grund, dem langen Femur, muß ich auch den meisten Arten von *Pterodactylus* die Eignung zu Schwimmfüßen absprechen, obwohl ihr Fuß einigermaßen an den von *Rhamphorhynchus* erinnert. Denn auch bei ihnen sind die Metatarsalia von ihrer Basis an etwas gespreizt und die Zehen bilden ihre geradlinigen Fortsetzungen, so daß der Fuß ausgesprochen plantigrad ist. Die Metatarsalia nebst den Zehen sind auch in keiner Weise verlängert.

13. Weichteile (Fig. 1).

Der Teil der Platte, der von dem Skelett eingenommen ist, zeigt einschließlich eines Saumes von etwa 10 mm außerhalb der Skeletteile eine eigentümlich geglättete Oberfläche, die sich auffällig von der übrigen rauhen Oberfläche der Platte abhebt, ohne aber irgendwo scharfe Umrisse zu bilden. Der Gedanke, daß diese Glätte künstlich durch Ätzung erzeugt sei, war unhaltbar, da sich auf der glatten Oberfläche schon mit bloßem Auge, besonders

aber unter der Doppellupe fast überall bald schärfer, bald schwächer angedeutet ein Relief von charakteristischen Figuren und Streifen erkennen ließ. Besonders deutlich traten auf der rechten Hälfte der Platte zwischen Unterarm und Fuß Figuren hervor, die im ersten Augenblick für Andeutungen eines Gefäßnetzes gehalten werden konnten, und die sich an der entsprechenden Stelle auf der linken Seite der Platte ebenfalls, aber viel undeutlicher wiederfanden. An anderen Stellen ließen sich Systeme von parallelen Streifen erkennen, ja der größte Teil der Fläche außerhalb des scheinbaren Gefäßnetzes zeigte eine verwaschene, etwas wellige Streifung, die fast den Eindruck einer wolligen Behaarung machte. In Verbindung mit der Erkenntnis, daß das scheinbare Gefäßnetz tatsächlich ein Gewirre von stärkeren und feineren Streifen war, die sich vielfach kreuzten, war ich eine Zeit lang geneigt, eine haarartige Körperbedeckung für diesen Pterosaurier anzunehmen, was ja als sicherer Beweis für eine Warmblütigkeit der Pterosaurier sehr interessant gewesen wäre.

Jedenfalls aber ist die glatte Beschaffenheit auf der Oberfläche der Platte von Weichteilen des Tieres hervorgerufen. Im Bereich der vorderen Extremitäten wird es sich hauptsächlich um die Flughaut handeln, wenn auch über deren Gestalt nichts zu entnehmen ist. Am rechten Fuß endet die glatte Oberfläche ziemlich genau mit den Spitzen der 5 weit auseinander gespreizten Zehen und macht das Vorhandensein einer Schwimmhaut zwischen den Zehen fast zur Gewißheit, um so mehr, als zwischen den ebenfalls weit gespreizten 3 Fingern der rechten Hand die glatte Oberfläche nicht ausgebildet ist. Es ist anzunehmen, daß sie frei waren. Auch zwischen dem rechten Unterarm und dem Hinterhaupt und Hals ist die Oberfläche der Platte rauh geblieben. An dieser Stelle haben Weichteile keine Spuren hinterlassen; ein Halspatagium war offenbar nicht vorhanden.

Über dem Scheitel aber breitet sich eine umfangreiche glatte Fläche in Höhe von etwa 20 mm aus, die mit einiger Phantasie als ein hahnenkammartiger Auswuchs auf dem Kopfe des Tieres angesehen werden könnte. Auch das Becken und der Stummelschwanz liegen noch innerhalb der glatten Oberfläche. Doch geht diese allmählich in die rauhe Fläche über und zeigt nirgends eine scharfe Grenze, die bestimmte Umrisse erkennen ließe.

14. Flughaut.

Um nun über die Natur der Gebilde klar zu werden, die diejenigen Stellen zeigen, die höchst wahrscheinlich auf die Flughaut zu beziehen sind, untersuchte ich den berühmten von Zittel (1882, Palaeontographica, Bd. 22, p. 51, Taf. 10) beschriebenen und vorzüglich abgebildeten Flügel von *Rhamphorhynchus gemmingi*, der eine der hervorragendsten Zierden der Münchner paläontologischen Staatssammlung darstellt. Es ist übrigens der rechte, nicht der linke Flügel, wie irrtümlich gedruckt ist. Hier zeigt nun die ganze Flughaut an allen Teilen, die gut genug erhalten sind, ein System von feinen, parallel dicht nebeneinander verlaufenden Längsstreifen, die überall geradlinig bis zum Rand der Flughaut sich erstrecken. Mit bloßem Auge noch deutlich sichtbar ragen diese Streifen an den besterhaltenen Stellen wie die scharfen Rippen einer Feile hervor, durch scharfe Zwischenräume voneinander getrennt, die kaum die Breite der Rippen zeigen. Im Innern der Flughaut zählt man unter der 2. Phalange 40—60 solcher Streifen auf die Breite von 1 cm, am Rande sinkt die Zahl stellenweise auf 25 für 1 cm. Sie verlaufen nahezu parallel oder in einem sehr spitzen Winkel zu den Phalangen des Flugfingers über die ganze Flughaut. Neben der Ulna sind sie undeutlicher, doch läßt sich sicher erkennen, daß sie sehr steil auf sie gerichtet sind und einen Winkel von über 45° mit ihr bilden. Auf dem Humerus stehen die Streifen fast senkrecht. Auch auf der anderen Seite der Armknochen findet man einzelne Spuren solcher Streifung, und zwar neben dem Spannknochen, zu dem sie senkrecht stehen, und neben dem Carpus, zu dem sie parallel verlaufen. Neben dem Metacarpus konnte ich solche Streifen nicht entdecken. An vielen Stellen werden die Streifen undeutlicher; dann springen sie nicht mehr so scharf hervor, sie erscheinen flacher und breiter und die Zwischenräume enger, bis sie auf längere oder kürzere Strecken ganz miteinander verschmelzen. Kommt eine Vereinigung zweier Streifen nur auf einer sehr kurzen Strecke zustande, so entsteht das Bild eines Knotens zwischen beiden Streifen. Doch ist das alles nur der Ausdruck eines weniger günstigen Erhaltungszustandes, d. h. die Platte hat sich an solchen Stellen weniger sauber von der Gegenplatte gelöst.

Einen einzelnen Streifen kann man, wo ein sehr guter Erhaltungszustand vorliegt, mitunter auf eine weite Strecke verfolgen, bis er plötzlich aufhört und die beiden Nachbarstreifen in kurzer Entfernung davon so weit sich nähern, daß sie wieder in normalem Abstand voneinander verlaufen. Umgekehrt schiebt sich auch oft zwischen zwei Streifen plötzlich ein neuer ein.

Auf eine längere Strecke als vielleicht 6 cm ist es aber kaum möglich, einen bestimmten Streifen ununterbrochen zu verfolgen. Nach einer längeren oder kürzeren Strecke folgt immer einmal eine Stelle, wo infolge einer Unebenheit oder einer anderen Störung der Streifen undeutlich wird und mit einem benachbarten mehr oder weniger lange verschmilzt, um sich weiterhin aber wieder von ihm zu trennen, ohne daß Sicherheit besteht, daß es immer noch der gleiche Streifen ist. Auf diese Weise hat man oft den Eindruck, daß ein Streifen sich gabelt, was aber bestimmt nicht der Fall ist.

Unter dem Gelenk zwischen 2. und 3. Phalange biegen in der Nähe des Flughautrandes eine Anzahl Streifen plötzlich von ihrer geraden Richtung ab und streben dem Rande zu.

Ich möchte diesen Befund mir dadurch erklären, daß ich in Übereinstimmung mit Zittel annehme, daß diese Längsstreifen tatsächlich starre elastische Fasern sind, die in der Flughaut eingebettet liegen zu ihrer Stütze, und daß sie resistenzfähiger sind als andere Weichteile der Flughaut, durch die sie aber in ihrer Lage festgehalten werden. Sobald nun aber nach dem Tode des Tieres durch Fäulnis das Gefüge der Flughaut sich lockert, gerät allmählich das System der elastischen Fasern, die bisher streng parallel nebeneinander in gerader Richtung verliefen, in Unordnung. Hier sehen wir nun den Beginn solcher Unordnung, indem sich die Enden einiger dieser Fasern frei gemacht haben und sich aus irgend einer Ursache gegen den Rand zu gebogen haben, wobei sie andere Streifen kreuzen.

An einer anderen Stelle, unter dem Gelenk zwischen 1. und 2. Phalange scheinen sich einige Streifen sehr deutlich zu gabeln. An einigen dieser Gabelungsstellen konnte ich mit Sicherheit beobachten, daß hier tatsächlich zwei Streifen sich kreuzen. An anderen Gabelungsstellen war das nicht mehr festzustellen, doch ist es mir sehr wakrscheinlich, daß hinter dem Kreuzungspunkt

zweier Fasern die eine von ihnen unkenntlich geworden ist. Jedenfalls lassen sich alle Übergänge zwischen sehr deutlichen Kreuzungen und scheinbaren Gabelungen nachweisen. Es liegt auch hier beginnende Mazeration vor. Ich kenne keinen unzweifelhaften Fall einer Gabelung der Fasern.

Nach diesen Beobachtungen an dem Zittelschen *Rhamphorhynchus*-Flügel vermag ich mir nun alle die rätselhaften Erscheinungen auf der Flughaut des vorliegenden Exemplars von *Anurognathus* zu erklären. Nur an ganz wenigen vereinzelten Stellen sind noch kleine Reste der ursprünglichen Parallelstreifung ganz unverändert und scharf, an einer Stelle sogar mit bloßem Auge zu erkennen. Es kommen 30—50 Streifen auf 1 cm. Die scheinbare Gefäßverzweigung wird durch scharf hervortretende Bruchstücke von Fasern vorgetäuscht, die zum Teil noch die gleiche Richtung bewahrt haben, aber von anderen gekreuzt werden, wodurch Gabelungserscheinungen entstehen. Eine Anzahl der Fasern sind noch gerade, andere bogenförmig gekrümmt, vielfach offenbar gebrochen und in kurzen Stücken wirr durcheinander liegend. Die wollhaarartigen Erscheinungen endlich lassen sich mit Sicherheit zurückführen auf sehr undeutlich gewordene, zum Teil scheinbar unter Bildung von Knoten miteinander verschmolzene Fasern, die ihre gegenseitige Lage noch ziemlich bewahrt haben, aber in ganzen Partien streckenweise etwas gebogen sind.

Die Aufgabe der Längsfasern, die bei den Flugsauriern dichtgedrängt die ganze Flughaut durchsetzen, war offenbar die, der Flughaut eine gewisse Starrheit zu verleihen. Es waren steife Spangen, die jedoch eine gewisse Biegsamkeit besaßen, die es aber zu verhindern hatten, daß eine Knickung der Flughaut quer zur Längsrichtung eintrat. So ist bei dem Zittelschen Exemplar ein ununterbrochenes System gerader Fasern zu erkennen, das sich längs der 4 Phalangen von einer Beugungsstelle des Flügels aus, die zwischen Unterarm und 1. Phalange liegt, bis zum Flügelende erstreckt. Es ist ausgeschlossen, daß dieser Fingerteil des Flügels zu einer Querfaltung oder -knickung befähigt ist. Dieser Fingerflügel mußte auch im Ruhezustand stets gerade ausgestreckt bleiben. Es muß auch ausgeschlossen gewesen sein, daß die 4 Phalangen gegeneinander in ihren Gelenken eine nennenswerte Beweglichkeit besessen haben. Bei den in gutem Zusammenhang

erhaltenen Exemplaren der Pterosaurier bilden auch in der Tat die 4 Phalangen miteinander in der Regel einen ungefähr geraden Stab.

Nur bei der Gattung *Pterodactylus* beobachtet man zwischen der 1. und 2. Phalange in der Regel eine unbedeutende Knickung von etwa 140°. Ob diese dauernd oder nur vorübergehend auftrat, ist nicht sicher zu entscheiden. Dieser Knickung des Fingers entspricht aber eine ebensolche Knickung am Karpalgelenk zwischen Unterarm und Metacarpus. Diese beiden Knickungen fügen sich bei eingeklapptem Flügel in der Ruhestellung völlig ineinander, wie bei einer Anzahl von Exemplaren aus dieser Gattung deutlich zu erkennen ist. Diese Knickung des sonst steifen Unterarms mit Metacarpus und die des Fingers kommt zu regelmäßig vor, als daß sie einen nur zufällig eingetretenen Zustand darstellen sollte. Sehr deutlich ist dieser Zustand z. B. auf der Abbildung von *Pterodactylus longirostris* zu sehen, die J. Hofker kürzlich veröffentlicht hat (K. Akad. Wetensch. Amsterdam. Wis- en Natuurk. Afdeel., Bd. 30, Nro. 6 und 7). Eine stärkere Knickung der Phalangen gegeneinander oder eine Faltung der Flughaut an solchen Stellen halte ich auch bei *Pterodactylus* für völlig ausgeschlossen. Und wo sonst zwei Flugfingerglieder bei den Skeletten der Pterosaurier einen nennenswerten Winkel miteinander bilden, ist fast sicher anzunehmen, daß der Zusammenhang des Gelenks gelöst ist.

Wie die Fasern an der Hauptbeugungsstelle der Flughaut zwischen Ulna und 1. Phalange sich verhalten, ist aus dem Zittelschen Flügel nicht ersichtlich. Hier muß die Möglichkeit einer Knickung der Längsfasern vorhanden gewesen sein, die der des Gelenkes zwischen Metacarpus und 1. Phalange entspricht, die ja ebenso ausgiebig war wie die eines Taschenmessers. In ausgespanntem Zustand, wenn der Flugfinger die fast gerade Fortsetzung des Unterarms bildete, müssen die vom Unterarm und Metacarpus ausgehenden Fasern sich geradlinig in die Fasern des Fingerflügels fortsetzen; im Ruhezustand müssen die ziemlich steil auf der Ulna stehenden Fasern einen sehr spitzen Winkel mit denen des Fingerflügels bilden.

Das von Marsh beschriebene Exemplar seines *Rhamphorhynchus phyllurus* zeigt auf der Flughaut des einen unvollständig

erhaltenen Flügels jedoch gerade an dieser Stelle eigentümliche an einen Wirbel erinnernde Unregelmäßigkeiten, die es sehr wahrscheinlich machen, daß hier bestimmte kreisartige Falten vorhanden sind, die innerhalb der Flughaut selbst eine Art von Gelenk darstellen ähnlich, wie in den Hinterflügeln der Käfer und Wanzen, die ebenfalls quer eingeschlagen werden können, auch solche gelenkartige Stellen sich finden. Eine mir vorliegende Photographie des Marshschen Exemplares zeigt dies Flügelhautgelenk sehr deutlich, während auf der veröffentlichten lithographischen Tafel diese Erscheinung wenig glücklich dargestellt ist.

Aus allem scheint mir mit Sicherheit hervorzugehen, daß der von den 4 Phalangen getragene Teil der Flughaut wohl einer Längsfaltung fähig war, die den Längsfasern entsprechend verläuft, wie es das Zittelsche Exemplar tatsächlich auch schön erkennen läßt. Auch scheint mir die Flughaut einer beschränkten Verschmälerung und Verbreiterung fähig gewesen zu sein, wobei die Längsfasern sich einander näherten oder voneinander entfernten. Von einer Querfaltung kann aber keine Rede gewesen sein mit Ausnahme zwischen Unterarm und 1. Phalange. In dieser Beziehung ist ein Vergleich der Flughaut der Pterosaurier mit der der Chiropteren ausgeschlossen. Bei den Chiropteren ist sie in mehrere dreieckige Felder eingeteilt, deren jedes auf zwei Seiten einen festen Rahmen besitzt, durch den es gespannt werden kann. Diese Rahmen bestehen aus dem Unterarm und den 4 Metacarpalia mit ihren Fingern, deren Auseinanderspreizen allein genügt, die Flughaut straff zu spannen. Steife elastische Fasern in der Flughaut, um sie beim Fluge straff zu halten wie bei den Pterosauriern, sind völlig überflüssig. Die von Zittel erwähnten elastischen Fasern im Fledermausflügel sind feinste mikroskopische Gebilde, die mit den groben Fasern der Pterosaurier gar nicht zu vergleichen sind. Sie dürften wohl nur dazu dienen, die Flughaut widerstandsfähiger zu machen. Dadurch, daß bei Fledermäusen die Finger aneinander gelegt werden können, und daß auch die Beugefähigkeit ihrer Phalangen wohl erhalten ist, kann die Flughaut in verschiedenen Richtungen in Falten gelegt werden, so daß sich die Tiere in der Ruhe darin wie in einen Mantel einwickeln können. Sie kräuselt sich dabei förmlich zusammen, und längere steife Fasern würden dabei entschieden nur hinderlich sein.

Dagegen läßt sich der Fingerflügel der Pterosaurier sehr wohl mit dem Handfittich der Vögel vergleichen, der aus den großen Handschwingen besteht, deren steife Schäfte die Funktionen sowohl der Längsfasern wie der Phalangen im Pterosaurier-Flügel vereinigen. Auch bei den Vögeln kann dieser Handfittich wohl der Länge nach zusammengeschoben, aber ebensowenig wie der Fingerflügel der Pterosaurier der Quere nach gefaltet werden und bleibt ebenso im Ruhestand gestreckt. Ja, wenn man die Längsfasern der Pterosaurier auf Schuppen zurückführen könnte, wozu aber nicht der geringste Anhaltspunkt vorliegt, könnte man sie mit einiger Phantasie sogar als Vorläufer der Schwungfedern ansehen, die unter Reduktion ihrer Zahl auch die Funktion der allmählich verkümmernden Phalangen übernommen haben. Natürlich kann eine solche Ansicht aus anderen Gründen gar nicht im Ernst erwogen werden.

Unter den Insekten findet man das Prinzip des Fingerflügels der Pterosaurier in verschiedenen Gruppen, am einfachsten und deutlichsten vielleicht bei den *Phasmidae* verwirklicht. Hier ist der Vorderrand des Hinterflügels stark chitinisiert und fest, dem knöchernen Flugfinger entsprechend, während die Flughaut selbst dünnhäutig ist und von einer Anzahl steifer gerader Längsnerven gestützt wird, die parallel zueinander bis zu dem Rand verlaufen. Sie gestatten, den Flügel im Ruhezustande in Längsfalten zusammen zu legen. Geht der starre Vorderrand in die Flugstellung über, so wird die Flughaut auch der Breite nach völlig ausgespannt, geht er aber in Ruhestellung über und wird eingeklappt, so legt sie sich mechanisch in Längsfalten zusammen.

15. Systematische Stellung.

Die systematische Stellung des *Anurognathus* als Mitglied der Rhamphorhynchoidea ist dadurch erwiesen, daß er mit Ausnahme des rudimentären Schwanzes in allen Merkmalen, durch die sich diese Gruppe von den Pterodactyloidea unterscheidet, nicht nur mit ihnen in ausgesprochenster Weise übereinstimmt, wie in der vollständigen Trennung der beiden Präorbitallücken, in der Kürze der Halswirbel, der Kürze des Spannknochens; sondern er entfernt sich gerade in der Ausbildung solcher Merkmale noch weiter von den Pterodactyloidea als irgend einer der übrigen

Rhamphorhynchoidea, so in der Kürze des Metacarpus und in der mächtigen Ausbildung der 5. Hinterzehe. Nichts wäre daher unrichtiger, als etwa anzunehmen, daß *Anurognathus* wegen seines Stummelschwanzes eine vermittelnde Stellung zwischen den beiden Gruppen einnimmt. Er entfernt sich im Gegenteil mehr als irgend eine der andern Formen von der Gruppe der Pterydactyloidea.

Vor allen übrigen Arten der Rhamphorhynchoidea zeichnet er sich aus durch Verkürzung der Schnauze, die geringe Zahl von Zähnen, durch das kurze Maxillare mit dem fast senkrecht aufsteigenden Fortsatz, durch die Länge von Oberarm und Unterarm sowie der 3 Krallenfinger mit ihren ungewöhnlich großen Krallen, durch die Kürze des Metacarpus, durch die Länge von Femur, Metatarsus und 5. Zehe, sowie durch deren große Phalangenzahl, vor allem aber durch seinen Stummelschwanz.

Neben *Campylognathus Zitteli* besitzt er weitaus den längsten Flügel und Flugfinger nicht nur in seiner Gruppe, sondern unter allen Pterosauriern.

In der Ausbildung eines zum Abspringen geeigneten Hinterbeines steht er mit vermutlich allen übrigen Rhamphorhynchoidea der Gattung *Rhamphorhynchus* gegenüber. Den Besitz von ausschließlich aufrecht stehenden Zähnen hat er mit allen anderen Rhamphorhynchoidea gemeinsam den Gattungen *Dorygnathus* und *Rhamphorhynchus* gegenüber.

Anurognathus besitzt wie *Dimorphodon* und *Scaphognathus* eine breit abgerundete Schnauze mit kurzer Unterkiefersymphyse, während bei *Dorygnathus, Campylognathus* und *Rhamphorhynchus* die Schnauze vorn spitz zuläuft mit einer langen Unterkiefersymphyse.

Die abgerundete Schnauze mit kurzer Symphyse und aufrechte Zähne sind primitive Merkmale, durch die *Anurognathus* mit *Dimorphodon* und *Scaphognathus* als eine ursprünglichere Formengruppe unter den Rhamphorhynchoidea ausgezeichnet ist. Von diesen beiden anderen in dieser Beziehung primitiveren Gattungen hat sich aber *Anurognathus* durch die enorme Steigerung seines Flugvermögens weit entfernt; durch diese wird auch die eigentümliche Ausbildung der Hinterbeine und der Verlust des Schwanzes verständlich. Die beiden anderen Gattungen bewahrten die ursprünglichen kurzen Flügel.

Anurognathus kann jedoch nicht von *Dimorphodon* abgeleitet werden, da der Besitz der ursprünglichen 4 Phalangen an der 5. Hinterzehe ihn in dieser Beziehung noch primitiver als diesen, der nur noch 2 Phalangen besitzt, erscheinen läßt. *Dimorphodon* hat bereits die Reduktion der Phalangenzahl erlitten, die auch alle übrigen Pterosaurier zeigen (dabei ist vorausgesetzt, daß die Angabe, es besitzen alle Rhamphorhynchoidea nur 2 Phalangen an der 5. Hinterzehe, auch wohl begründet ist). *Anurodactylus* hat sich bereits vom Stamm der Rhamphorhynchoidea getrennt zu einer Zeit, als diese noch im Besitz der vollen Phalangenzahl waren, wohl schon ehe sich die Pterodactyloidea davon getrennt hatten.

16. Schlussbetrachtungen (Fig. 2).

Bei der von mir versuchten Darstellung des Skeletts von *Anurognathus* habe ich nur ergänzt, was ich glaubte, vollständig verantworten zu können, und habe absichtlich den Schultergürtel mit dem Sternum und die äußeren Teile der meisten Rippen sowie die Bauchrippen weggelassen, da keine genügenden Anhaltspunkte zu deren einwandfreier Wiederherstellung vorlagen; auch würde ihre Einzeichnung zum Teil wenigstens sicher beobachtete Teile des Skeletts unübersichtlich gemacht haben.

Der kurze katzenartige Schädel gibt der neuen Form ein höchst fremdartiges Aussehen unter den Pterosauriern. Diese Eigentümlichkeit im Verein mit dem Auftreten von überaus mächtigen Krallen an den Vorderfüßen, worin alle übrigen Pterosaurier weit hinter ihr zurückstehen, läßt sich vielleicht in der gleichen Weise erklären wie die auffallende Verkürzung der Schnauze bei einer Reihe von Säugetieren und Vögeln, wie z. B. der Katzen, Affen und Halbaffen, der Elefanten, der Papageien, Eulen und vieler Tagraubvögel. Eine weit vorgezogene Schnauze bzw. Schnabel, wie sie den ursprünglicheren Formen zukommt, ist angezeigt bei solchen Formen, die sich ihrer Nahrung noch in der ursprünglicheren Weise bemächtigen, daß sie sie direkt mit dem Gebiß oder Schnabel erschnappen. Wird aber diese Aufgabe von anderen Organen übernommen, wie das bei Raubvögeln durch die scharf bewehrten Fänge, bei Katzen durch die Vorderpranken geschieht, bei den Affen und Papageien durch die Greifhände und -füße, beim Elefanten durch den Rüssel, so daß die Nahrung durch

deren Vermittlung erst dem Munde zugeführt wird, dann ist eine verlängerte Schnauze zwecklos, und es genügen dann die verkürzten Kiefer vollständig, um die von den Hilfsorganen erbeutete Nahrung aufzunehmen und zu verarbeiten. Daß dieses Prinzip nicht alle derartigen Fälle erklärt, spielt dabei keine Rolle, doch kann ich bei der Betrachtung der kurzschnauzigen Fledermäuse die Vermutung nicht ganz unterdrücken, ob hier die besonders kräftige Bewaffnung des Daumens bei Erbeutung der Nahrung nicht doch auch manchmal eine gewisse Rolle spielt. Bei *Anurognathus* aber muß ich es für recht wahrscheinlich halten, daß die ungewöhnlich großen und spitzen Krallen nicht ausschließlich den Zweck haben, den Tieren beim Klettern und Festhalten an Felsen oder Baumstämmen zu dienen. Ich vermute vielmehr, daß sie auch beim Erhaschen der hauptsächlich wohl aus fliegenden Insekten bestehenden Nahrung eine gewisse Rolle spielen. Vielleicht hingen sie sich mit den Hinterkrallen fest und fingen mit den Vorderkrallen vorüberfliegende Tiere, wie das manche Insekten tun (*Bittacus* mit den Hinterbeinen).

Die kurze Schnauze von *Anurognathus* läßt sich übrigens auch unter einen anderen Gesichtspunkt bringen, der zur Erklärung der Kurzschnauzigkeit bei den Fledermäusen zu berücksichtigen ist. Es scheint, daß diese eine Eigentümlichkeit aller Wirbeltiere ist, die gewohnt sind, im Fluge ihre fliegenden Beutetiere zu jagen und mit dem Maule zu fangen. Dazu gehört die große Mehrzahl der Microchiroptera, aber nur verhältnismäßig wenige Vögel sind dazu imstande, wie besonders die *Hirundinidae, Cypselidae, Caprimulgidae* und *Podargidae*. Es sind das aber gerade die Vögel, die sich durch einen besonders kurzen und schwachen Schnabel, dabei aber durch eine ungewöhnlich weite Mundspalte auszeichnen. Kein langschnäbliger Vogel jagt auf diese Weise, und es scheint, daß bei solcher Art des Nahrungserwerbs, die nur von äußerst gewandten Fliegern ausgeübt werden kann, die kurze Schnauze bzw. Schnabel unbedingtes Erfordernis ist. Daß die Fledermäuse zu solcher Jagd so vorzüglich befähigt sind, beweist übrigens, daß sie an Fluggewandtheit die meisten Vögel übertreffen und nicht die unbeholfenen Flieger sind, als welche sie mitunter in Gegensatz zu den Vögeln gestellt werden.

Anurognathus muß, der Länge der Flügel nach zu urteilen, ein ungewöhnlich gutes Flugvermögen besessen haben, wie es unter den Pterosauriern nur noch bei *Campylognathus Zitteli* in annähernd gleichem Maße der Fall sein mochte. Aber nicht nur unter den Flugechsen war *Anurognathus* der beste Flieger, auch unter den Vögeln wetteifert er mit den vorzüglichsten Fliegern wie Seeschwalben, Seglern und Nachtschwalben, wenn man die Flügel- oder auch die Fittichlänge verglichen mit der Rumpflänge als Wertmesser nehmen darf.

Bemerkenswert ist noch, daß unter allen Pterosauriern *Anurognathus* weitaus den relativ längsten Ober- und Unterarm besitzt, und daß auch die Länge der ersten Phalange des Flugfingers von keiner anderen Art merklich übertroffen wird. Dagegen kommt in der Kürze der Mittelhand kein anderer Pterosaurier dem *Anurognathus* auch nur annähernd gleich.

Die Hinterbeine des *Anurognathus* dürften, wie ich oben bereits ausgeführt habe, in beschränktem Maße zum Springen geeignet gewesen sein, und ich möchte mir vorstellen, daß das Tier vor dem Abspringen zum Flug etwa die Haltung eines Frosches eingenommen haben mag mit erhobenem Vorderkörper, der sich auf das Ende des Metacarpus stützte, während das Becken auf den Boden gedrückt war. Die wie bei den Fledermäusen fast senkrecht von der Körperachse abstehenden Oberschenkel machen es mir wahrscheinlich, daß das die Ruhestellung auf fester Unterlage gewesen sein mag. Dabei ist es gleichgültig, ob sie dabei auf der Erde auf etwa wagrechtem Boden sich befanden oder an mehr oder weniger senkrechten Felsen oder Baumstämmen mit den Krallen sich festhielten. Die Fähigkeit, sich wie Fledermäuse frei anzuhängen, spreche ich ihnen dabei keineswegs ab.

Daß diese hockende Stellung mit mehr oder weniger hochgehaltenem Vorderkörper auch von den Arten von *Pterodactylus* eingenommen wurde, möchte ich aus der eigentümlichen Knickung zwischen Unterarm und dem verlängerten Metacarpus annehmen, die man bei vielen der besser erhaltenen Skelette von *Pterodactylus* beobachten kann. Diese beiden Armteile bilden miteinander einen stumpfen, nach hinten offenen Winkel. Diese geringe Knickung ermöglicht eine freiere Haltung des Oberkörpers in der Ruhe und einen festeren Auftritt auf das Ende des Metacarpus,

als wenn dieser die geradlinige Verlängerung des Unterarms auch im Zustand der Ruhe bliebe. Vielleicht wird obendrein ein kräftigeres Abschnellen des Körpers beim Abflug durch diese Knickung begünstigt, wenn man annimmt, daß die beiden Armteile dabei plötzlich in die gestreckte Lage übergehen. Da der im übrigen stets ganz gerade bleibende Flugfinger in der Ruhelage eng gegen den Unterarm und Metacarpus eingeklappt wird, zeigt sich dabei eine ganz entsprechende Knickung auch zwischen der ersten und zweiten Phalange des Flugfingers, die auf die Knickung zwischen Unterarm und Metacarpus paßt. Von einem Zusammenlegen der Phalangen des Flugfingers wie bei den Fledermäusen kann auch bei *Pterodactylus* meines Erachtens gar keine Rede sein. Diese Knickung des Flugfingers ist bei den Rhamphorhynchoidea nur aus dem Grunde nicht vorhanden, weil ihre Veranlassung, eine Knickung am Unterarm wegen der Kürze des Metacarpus keine Rolle spielt. Deshalb wird bei ihnen der Flugfinger auch stets völlig gestreckt getragen. Dafür wird bei den meisten Rhamphorhynchoidea das Abschnellen des Körpers für den Abflug durch den oben besprochenen eigentümlichen Bau des Metatarsus erleichtert, der sich bei *Pterodactylus* kaum dafür eignet, ebensowenig wie der von *Rhamphorhynchus*.

Daß die Funktion der Hinterextremitäten bei allen Pterosauriern doch eine ganz andere gewesen sein muß wie bei den Chiropteren, möchte ich schon daraus schließen, daß bei letzteren Femur und Tibia stets ungefähr gleich lang sind, während bei den Pterosauriern die Tibia stets beträchtlich verlängert ist wie bei den Vögeln. Auch die auffallende Kürze des ganzen Hinterfußes der Chiropteren gegenüber dem aller Pterosaurier bestätigt dies.

Was die Beteiligung der Hinterextremität an der Flugtätigkeit betrifft, so scheint sie mir bei *Anurognathus* ganz erheblich gewesen zu sein. Zweifellos waren sämtliche Zehen bis zu ihrer Spitze durch eine Flughaut miteinander verbunden, die bei ausgespreizten Zehen, wie das bei unserem Original an beiden Füßen der Fall ist, einen beträchtlichen Umfang gehabt hat. Vermutlich stand diese Flughaut der Hinterfüße mit der der Vorderextremitäten in Zusammenhang. Dagegen ist es höchst unwahrscheinlich, daß die beiden Hinterextremitäten durch ein Uropatagium miteinander in Verbindung waren. Sonst wäre es wohl un-

möglich gewesen, daß bei dem vorliegenden Individuum, das kaum irgend eine Andeutung von Zerrungen oder Zerreißungen nach dem Tode erkennen läßt, die beiden Hinterfüße sich so weit voneinander entfernen konnten, wie es auf der vorliegenden Platte zu sehen ist. Nimmt man an, daß beim Fluge die Hinterfüße in der Weise wie bei Fledermäusen gehalten wurden, so vergrößerten sie nicht nur die Tragfläche der Flügel ganz erheblich, sondern mußten vor allem als ganz vorzügliche mächtige Steuer dienen können. In jede Lage verstellbar, durch das Spiel der Zehen bald breit bald schmal werdend, dienten sie ebensogut als Horizontal- wie als Vertikalsteuer und ermöglichten blitzschnelle Wendungen und wohl auch fast augenblickliches Stillhalten mitten im rasendsten Fluge. Ein langer Schwanz wäre bei diesen vorzüglichen Flug- und Steuereinrichtungen nur ein Hindernis gewesen. *Anurognathus* muß ein Flugkünstler ersten Ranges gewesen sein, und was die vereinte Leistungsfähigkeit seiner Flug- und Steuerorgane betrifft, dürfte unter den bisher bekannten rezenten wie fossilen Wirbeltieren seinesgleichen nicht wieder anzutreffen sein.

Beim Flug wird die Haltung der Hinterfüße bei allen Pterosauriern dieselbe gewesen sein wie bei den Chiropteren, die Oberschenkel fast senkrecht zur Körperachse, die Tibia fast rechtwinklig dazu, die Zehenspitzen nach hinten und außen gerichtet, die 1. Zehe nach außen, die 5. Zehe dem Körper zugewendet, also die Plantarseite nach unten, nicht umgekehrt, wie es oft, selbst unter den neuesten Publikationen dargestellt wird. Die 5. Zehe könnte allenfalls ein Uropatagium spannen wie der Sporn der Fledermäuse, der auf der gleichen Seite liegt, falls ein solches überhaupt vorhanden war, aber niemals dem zwischen den Hinterfüßen und dem Flugfinger befindlichen Teil der Flughaut zur Stütze dienen. Bei den Vögeln, die im Fluge die ganzen Beine gerade nach hinten strecken, ist die Haltung der Füße gerade umgekehrt, die Plantarseite nach oben, die 5. Zehe auf der äußeren Seite.

Die Literatur ist von Arthaber 1919 (Denkschriften der Akad. Wiss. Wien, Bd. 97) und 1921 (Paläontol. Zeitschr. Bd. 4) erschöpfend angegeben. Darin nicht berücksichtigte oder seither neu erschienene Schriften sind im Text genauer bezeichnet.

	Rumpf	Hals	Schädel	Schwanz	Humerus	Radius	Metacarp.	1.—3.
1. Pterosauria								
Dimorphodon macronyx	160	110	222 - 1.4	530	87 - 0.54	96 - 0.6	41 r 2.3	27, 3
Dorygnathus banthensis	157	112	149 - 1	300	63 - 0.4	103 - 0.6	31 r 3.3	22, 3
Scaphognathus crassirostris	105	90	115 - 1.1		50 - 0.47	94 - 0.9	27 r 3.5	23, 2
Rhamphorhynchus longicaudus	39	22	34 - 0.8	110	15 - 0.39	24 - 0.6	10 r 2.4	6, 8,
„ Gemmingi	100	65	123 - 1.2	291	39 - 0.39	62 - 0.6	19 r 3.2	15, 1
„ Kokeni	125	125	150 - 1.2		58 - 0.46	95 - 0.8	34 r 2.8	26, 3
Campylognathus liasicus	80	40	80 - 1	260	42 - 0.5	50 - 0.6	18 r 2.8	
„ Zitteli	128	72	130 - 1	580	68 - 0.53	82 - 0.6	32 r 2.6	
Anurognathus Ammoni	45	28	45 - 1	14	31 - 0.69	46 - 1	10.5 r 4.4	15, 1
Pterodactylus elegans	29	27	33 - 1.1	7	14 - 0.48	20 - 0.7	16 r 1.3	4.5, 7
„ spectabilis	28	27	44 - 1.6	7	15 - 0.5	19 - 0.7	14 r 1.4	
„ scolopaciceps	45	54	71 - 1.6	20	28 - 0.62	32 - 0.7	22 r 1.4	
„ longirostris	57	97	107 - 1.9	21	31 - 0.54	47 - 0.8	33 r 1.4	14, 1
„ Kochi	49	45	80 - 1.6	21	28 - 0.57	43 - 0.9	30 r 1.4	11.5,
„ micronyx	46	42	59 - 1.3	17	25 - 0.54	31 - 0.7	35 r 0.9	4, 6.5
„ longicollum	150	250	215 - 1.4		78 - 0.52	104 - 0.7	130 r 0.8	
Pteranodon ingens	400	400	800 - 2	16	202 - 0.5	290 - 0.7	455 r 0.6	
2. Aves								
Phalacrocorax carbo	201	280	135 - 0.7	180	168 - 0.8	171		
Anas boschas	159	250	114 - 0.7	90	102 - 0.6	88		
Mergus merganser	165	240	124 - 0.7	80	101 - 0.6	85		
Larus ridibundus	75	112	82 - 1.1	130	75 - 1	93		
Sterna hirundo	58	79	69 - 1.2	140	56 - 1	65		
Diomedea exulans	290	360	265 - 0.9	230	430 - 1.5	430		
Scolopax rusticola	72	88	113 - 1.6	90	55 - 0.8	61		
Tetrao urogallus	176	240	120 - 0.7	360	125 - 0.7	115		
Columba palumbus	81	101	56 - 0.7	170	47 - 0.6	57		
Falco subbuteo	65	46	50 - 0.7	160	55 - 0.8	62		
Astur palumbarius	99	90	71 - 0.7	290	83 - 0.9	99		
Haliaetus albicilla	185	200	118 - 0.7	320	210 - 1.1	240		
Sarcorhamphus gryphus	221	300	160 - 0.7	420	270 - 1.2	310		
Cypselus apus	34	31	32 - 1	80	12 - 0 35	18		
Caprimulgus europaeus	38	43	42 - 1.1	120	37 - 1	47		
Dryocopus martius	77	84	79 - 1	175	52 - 0.7	63		
Corvus corone	91	99	91 - 1	200	69 - 0.8	82		
Turdus merula	47	50	48 - 1.1	120	30 - 0.6	35		
Archaeopteryx Siemensi	96	63	45 - 0.5	170	63 - 0.7	54		
3. Chiroptera								
Pteropus Edwardsi	112	45	74 - 0.7	0	116 - 1	166		
Phyllostoma perspicillatum	39	9	35 - 0.9		36 - 0.9	58		
Vesperugo noctula	41	10	19 - 0.5	40	30 - 0.7	50		
Vespertilio murinus	39	12	24 - 0.6	53	35 - 0 9	58		

1.—4. Phalange des Flugfingers	Flugfinger	Flügel	Femur	Tibia	Metatars.	Längste Zehe	5. Zehe, Metatarsus u. Phal.
-0 6, 117, 133, 94	450 p 4.4	677 -4.2	86 -0.54	132	35 f 0.4	32	14; 29, 27
-0.5, 101, 102, 83	365 p 4.7	565 -3.6	52 -0.33	69	31 f 0.6	36	7; 26, 27
-0.6, 74	300 p 4.6	473 -4.5	53 -0.5				
-0.9, 28, 26, 28	114 p 3.5	164 -4.2	12 -0.3	15	8.5 f 0.7	5	2.3; 4,4
-1, 100, 90, 94	387 p 3.8	510 -5.1	28 -0.3	42	23 f 0.8	18	3.5; 9,9
-1 2,	550 p 3.7	739 -5.9	45 -0.36	64	34 f 0.8		
-0.9, 80, 70, 60	284 p 3.8	398 -5	32 -0 4	38	19 f 0.6	16	; 5,3
-1.4, 209, 165, 121	680 p 3.7	862 -6.7	69 -0.54	88	41 f 0.6	38	10; 10,6
-1.3,	218 p 3.7	305 -6.8	27 -0.6	39	18 f 0.67	14	4.5;9, 2.5, 4.5, 12
-0 7, 20, 16, 14	71 p 3.3	121 -4.2	12 -0.4	18	8 f 0.66	6	1; 0.5
-0 7, 18, 16, 15	69 p 3.4	117 -4.2	15 -0 5	20	f 0.5		
-0.7, 29, 27, 20	108 p 3.4	189 -4.2	22 -0.5	31	12 f 0.5	9	2; 1
-0.8, 45, 36, 29	157 p 3.4	269 -4.7	34 -0.6	47	20 f 0.6	12	3; 1.5
-0.9, 36, 32, 25	136 p 3.2	238 -4.8	30 -0.6	41	16 f 0.5	14	4; 1.5
-1, 27, 20, 19	111 p 2.4	203 -4.4	28 -0.6	39	8 f 0.3	7	
-1.1, 109, 77, 65	411 p 2.6	725 -5	99 -0.7	149	30 f 0.3		
-1.4, 470, 322, 193	1535 p 2.8	2487 -6.2	192 -0.5	290	77 f 0.4	78	
	Fittich				Lauf		
	450 -2.2	789 -3.9	62 -0.3	110	65 f 1	105	
	300 -1.9	490 -3.1	56 -0.3	95	45 f 0.8	60	
	300 -1.8	486 -3	57 -0.3	95	52 f 0.9	75	
	310 -4 1	473 -6.4	38 -0.5	77	50 f 1.3	41	
	270 -4.6	391 -6.7	25 -0.4	42	21 f 0.8	21	
	700 -2.4	1560 -5.4	110 -0.4	215	118 f 1.1	175	
	210 -3	326 -4.5	46 -0.6	67	37 f 0.8	40	
	430 -2.4	640 -3.7	116 -0.6	140	70 f 0.6	70	
	250 -3.1	354 -4.4	45 -0.6	65	36 f 0.8	30	
	275 -4.2	392 -6	34 -0.5	63	42 f 1.2	31	
	360 -3.7	547 -5.5	75 -0.8	94	80 f 1.1	58	
	610 -3.3	1060 -5.7	111 -0 6	154	93 f 0.8	93	
	840 -3.8	1420 -6.4	145 -0.7	220	120 f 0.8	135	
	170 -5	200 -5.9	18 -0.5	27	12 f 0.7	12	
	190 -5	274 -7.2	23 -0.6	34	19 f 0 8	20	
	250 -3.3	365 -4.7	41 -0.5	52	34 f 0.8	35	
	300 -3.3	451 -5	56 -0.6	88	58 f 1	49	
	110 -2.4	175 -3.7	31 -0.7	48	34 f 1.1	29	
	163 -1.7	280 -3	51 -0.5	70	34 f 0.7	30	
					Metat.		
	316 -2.8	598 -5.3	64 -0.6	77	13 f 0.2	37	
	113 -2.9	207 -5.3	22 -0.6	23	5 f 0.2	9	
	96 -2.3	176 -4.3	18 -0.4	18	3 f 0.2	7	
	92 -2.3	163 -4.2	21 -0 5	22	3 f 0.15	7	

17. Bemerkungen zu den Tabellen (vgl. pag. 120).

Die an erster oder einziger Stelle aufgeführten Zahlen sind absolute Werte in mm, die an zweiter Stelle mit einem Vorzeichen versehenen sind relative Werte, und zwar ist bei allen mit - versehenen Zahlen die Rumpflänge (1. Rückenwirbel bis letzter Sakralwirbel) als Einheit genommen (Rumpf = 1).

Die mit *r* versehenen Werte des Metakarpus bezeichnen das Verhältnis von Radius zum Metakarpus *(R : M)*.

Die mit *f* versehenen Werte des Metatarsus beziehen sich auf das Femur als Einheit *(M : F)*.

Die mit *p* versehenen Werte des Flugfingers beziehen sich auf seine 1. Phalange als Einheit *(F : P)*.

Die absoluten Werte für Pterosaurier und Archaeopteryx sind bekannten Autoren entnommen, soweit sie solche Werte angaben, wie H. v. Meyer, Zittel, Plieninger, Broili, Eaton, Dames, mitunter nach Münchener Originalen etwas abgeändert.

Die Maße für *Dimorphodon* sind an Owens Rekonstruktion gemessen, die für *Dorygnathus* an der Arthaberschen Abbildung des Wiener Exemplars, die für *Campylognathus liasicus* an einer Originalphotographie des Pittsburger Exemplars (das auf keinen Fall *C. Zitteli* ist). Die Maße von *Dimorphodon* dürften sehr unzuverlässig sein, die von *Dorygnathus* und *C. liasicus* sind nur relativ genau. Auch einzelne Maße der anderen Arten mußten erst ergänzt werden. Die Maße der kleineren Phalangen sind vielfach nur annähernd.

Die Maße für Vögel und Chiroptera wurden an Skeletten der Münchener Zoologischen Sammlung gewonnen, die Fittichlänge der Vögel jedoch an anderen Exemplaren oder aus der Literatur, was bei Vögeln meist nur unbedeutende Abweichungen ergeben kann.

Trotz mancherlei Fehlerquellen und Ungenauigkeiten dürften die erhaltenen absoluten und relativen Werte den damit beabsichtigten Zwecken genügen, doch fand ich, wie wünschenswert es wäre, wenn solche Maße einmal in möglichster Vollständigkeit kritisch zusammengestellt würden. Zur Unterscheidung der Arten sind sie unentbehrlich.

Zur Abhandlung des Herrn F. Lindemann: Über Biegungsflächen.

Von **H. Liebmann** und **K. Kommerell.**

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Mai 1923 von dem korrespondierenden Mitglied A. Brill in Tübingen.

Im 29. Band der Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, ist eine Arbeit von Herrn F. Lindemann „Die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche" erschienen.

Die Ankündigung (Sitzung vom 5. Februar 1921) stellt in Aussicht, der Verfasser werde „für jede Fläche beliebig viele Verbiegungen durch bloße Quadraturen angeben und weiter . . alle Biegungsflächen einer gegebenen Fläche unter Einführung willkürlicher Funktionen mittelst aufeinander folgender Quadraturen analytisch darstellen".

Ein erstes Verfahren erstrebt das Ziel auf folgendem Weg. Es seien α, β Minimalparameter, also das Bogenelement gegeben durch

$$ds^2 = 2F(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$

und x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Fläche S. Dann wird gesetzt (§ 8, S. 22)

$$z_1 = ax + by + cz,$$

wo zwischen den Konstanten a, b, c die Beziehung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ bestehen soll, und behauptet, eine neue Fläche S_1 mit zwei wesentlichen Konstanten und demselben Bogenelement

$$ds^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = 2F(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

könne so bestimmt werden, daß sie zu S weder kongruent noch symmetrisch ist.

Dieser Behauptung steht folgende Überlegung entgegen. Man betrachte die Fläche S_2 mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_2 &= ax + by + cz, \\ x_2 &= a'x + b'y + c'z, \\ y_2 &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

wo rechts die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation stehen. Dann ist

$$z_2 = z_1$$

und

$$dz_1^2 + dx_1^2 + dy_1^2 = dz_2^2 + dx_2^2 + dy_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

also

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dx_2^2 + dy_2^2.$$

Daraus folgt, daß die Projektionen von S_1 und S_2 auf die xy-Ebene kongruent oder symmetrisch sind und, weil $z_1 = z_2$ ist, daß die Flächen S_1 und S_2 kongruent oder symmetrisch sind und darum auch S_1 und S.

Die Methode kann also keine neuen Flächen geben, was übrigens der Verfasser für das Beispiel der Kugel selber festgestellt hat (S. 24).

Die zweite Methode soll sodann die allgemeine Lösung der Bourschen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (Gl. 36, S. 11, Gl. 84, S. 31, vgl. Gl. 17, S. 6) liefern, welche jede der rechtwinkligen Koordinaten der Fläche mit gegebenem Bogenelement zu erfüllen hat — sie soll die allgemeine Lösung geben, wenn eine partikuläre ($\varepsilon = W$) vorliegt.

Für z_1 wird der Ansatz gemacht (S. 31)

$$z_1 = i \int (R W_\alpha \, d\alpha - R' W_\beta \, d\beta)$$

und die Erfüllung der Integrabilitätsbedingung (82), S. 28

$$R_\beta W_\alpha + R'_\alpha W_\beta + (R + R') W_{\alpha\beta} = 0$$

gefordert. Der Verfasser stellt auch ausdrücklich die zweite Bedingung (84 b), S. 31 auf, die hinzukommen muß, damit z_1 die Boursche Gleichung erfüllt.

Es heißt dann wörtlich (S. 31): „Die Funktionen R und R' sind also allein . . . durch die Gleichung (82) gebunden, außerdem aber mit W durch die Gleichung (84 b) verkettet, die eine Folge der übrigen Gleichungen sein muß.

Dies würde also Folgendes besagen: Für z_1 darf eine willkürliche Funktion von α, β genommen werden, worauf sich aus

$$\frac{\partial z_1}{\partial \alpha} = i R W_\alpha, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \beta} = -i R' W_\beta$$

die Funktionen R und R' ergeben; diese erfüllen dann (82) identisch. Wäre nun die Gleichung (84 b) wirklich „eine Folge der übrigen Gleichungen" so würde dies heissen, daß die willkürliche Funktion z_1 die Boursche Gleichung erfüllt. Auf S. 34 steht dementsprechend: „Nach letzteren [den allgemeinen Formeln] sind R und R' allein an die Gleichung (82) (die Integrabilitätsbedingung) gebunden." —

In der Tat versagt die Methode, wie der Verfasser feststellt (eben auf Seite 34), für den einfachsten Fall, nämlich die abwickelbaren Flächen; er fügt hinzu: „diese Ausnahme kann offenbar auch nur dann eintreten, wenn die Fundamentalgröße F gleich einer Konstanten ist" — also nur bei Anwendung der Methode auf die abwickelbaren Flächen.

Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt.[1])

Von **Georg Faber.**

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Juli 1923.

G sei ein einfach zusammenhängender abgeschlossener Bereich mit der Randkurve C und dem Flächenelement dw. U sei unter den in G stetig differenzierbaren und den zwei Nebenbedingungen:

1) $$U = 0 \text{ auf } C,$$

2) $$\iint_G U^2 \, dw = 1$$

genügenden Funktionen diejenige, für die der Integralwert

3) $$\iint_G (\text{grad } U)^2 \, dw \text{ möglichst klein wird.}$$

Der Maximalwert von U in G sei c (> 0). Ferner sei, falls $0 < \gamma \leq c$, G_γ sei das Teilgebiet von G, für das $U \leq \gamma$ gilt; G ist also mit G_c identisch. F_γ sei der Flächeninhalt von G_γ, C_γ bilde zusammen mit C den Rand von G_γ, C_0 und G_0 bedeuten das nämliche wie C, s_γ sei (im Falle $\gamma < c$) die Bogenlänge von C_γ.

---

[1]) Es ist das meines Wissens der erste Beweis für diesen vermutungsweise häufig ausgesprochenen Satz (vgl. Lord Rayleigh, The Theory of Sound, London 1894, Bd. I, S. 339—340). Ein ähnlich lautender, von Herrn Courant (Math. Zeitschrift, Bd. I (1918), S. 321) bewiesener Satz, bei dem die Membrane vom nämlichen Umfang statt, wie oben, die vom nämlichen Flächeninhalt in Vergleich gezogen werden, folgt leicht aus dem obigen, während das Umgekehrte nicht gilt.

Endlich sei

$$4) \qquad J_\gamma = \iint\limits_{G_\gamma} (\text{grad } U)^2 \, dw,$$

sodaß also das Integral (3) soviel ist wie J_c.

Ich betrachte weiter für $0 < \gamma < c$ ein System konzentrischer Kreisringflächen K_γ mit den inneren Radien r_γ und dem gemeinsamen äußeren Radius r_0. Diese Radien werden bestimmt durch die Bedingung:

5) Flächeninhalt $(r_0^2 - r_\gamma^2)\,\pi$ von K_γ = Flächeninhalt F_γ von G_γ,

6) Flächeninhalt $r_0^2\,\pi$ des äußeren Kreises K_c (vom Radius r_0) = Flächeninhalt F_c von G.

Die Kreislinie vom Radius r_γ heiße k_γ; K_0 ist soviel wie k_0. k_c ist der gemeinsame Mittelpunkt aller Kreise. In K_c werde eine Funktion V definiert durch die Gleichung:

$$7) \qquad V = \gamma \text{ auf } k_\gamma \ (0 \leq \gamma \leq c).$$

Dann wird

$$8) \qquad \iint\limits_{K_c} V^2 \, dw = \iint\limits_{G_c} U^2 \, dw = 1.$$

Ich setze noch

$$9) \qquad i_\gamma = \iint\limits_{K_\gamma} (\text{grad } V)^2 \, dw \qquad (0 < \gamma \leq c; \ i_0 = 0).$$

Der mathematische Nachweis des in der Überschrift behaupteten Satzes besteht nun darin, daß gezeigt wird: es ist

$$10) \qquad J_c > i_c,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn G mit K_c kongruent ist. Den Beitrag ΔJ_γ des zwischen C_γ und $C_{\gamma+\Delta\gamma}$ gelegenen Gebietes $G_{\gamma+\Delta\gamma} - G_\gamma$ zu dem Integrale J_c vergleiche ich mit dem Beitrage Δi_γ des zwischen k_γ und $k_{\gamma+\Delta\gamma}$ gelegenen gleich großen Kreisringgebiets $K_{\gamma+\Delta\gamma} - K_\gamma$ zu dem Integrale i_c $(0 \leq \gamma < \gamma + \Delta\gamma < c)$.

Zu diesem Zweck teile ich den Umfang s_γ von C_γ durch n Punkte: $P_1, P_2, \ldots P_n$ in n Teile, die entweder alle einander gleich sind oder doch wenigstens die Bedingung erfüllen, daß der Quotient irgend zweier Teilbögen für $n \to \infty$ gegen 1 strebt.

In den Teilpunkten errichte ich die Normalen auf C_γ und nenne deren zwischen C_γ und $C_{\gamma+\Delta\gamma}$ gelegenen Stücke: $\Delta\nu_1, \Delta\nu_2, \ldots \Delta\nu_n$. $\Delta\gamma$ sei gleich $s_\gamma : n$ (was zur Voraussetzung hat, daß n auf Werte $> s_\gamma : (c - \gamma)$ beschränkt wird), ε_n sei eine Zahl, die für $n \longrightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, nicht jedesmal die nämliche, und Δr werde zur Abkürzung für $r_\gamma - r_{\gamma+\Delta\gamma}$ geschrieben.

Dann ist

$$\Delta J_\gamma = \sum_1^n{}^i \left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta\nu_i}\right)^2 \frac{s_\gamma}{n} \Delta\nu_i (1 + \varepsilon_n), \tag{11}$$

$$\Delta i_\gamma = \left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta r}\right)^2 2\pi r_\gamma \Delta r (1 + \varepsilon_n), \tag{12}$$

$$\frac{\Delta J_\gamma}{\Delta i_\gamma} = \frac{s_\gamma \Delta r (1 + \varepsilon_n)}{n 2\pi r_\gamma} \sum_1^n{}^i \frac{1}{\Delta\nu_i}. \tag{13}$$

Nun gilt bekanntlich folgender Satz (den man noch einfacher als mittels Differentialrechnung durch den Schluß von n auf $n + 1$ beweist): Falls die Summe s der positiven Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben ist, nimmt für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = s : n$ die Summe

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \text{ ihren Minimalwert } \frac{n^2}{s} \text{ an.} \tag{14}$$

Da aber nach Voraussetzung

$$\frac{s_\gamma}{n} \sum_1^n{}^i \Delta\nu_i = 2\pi r_\gamma \Delta r (1 + \varepsilon_n) \tag{15}$$

ist, folgt aus (14):

$$\sum_1^n{}^i \frac{1}{\Delta\nu_i} > \frac{n s_\gamma}{2\pi r_\gamma \Delta r} (1 + \varepsilon_n). \tag{16}$$

Setzt man diesen Wert in (13) ein, so findet man:

$$\frac{\Delta J_\gamma}{\Delta i_\gamma} > \left(\frac{s_\gamma}{2\pi r_\gamma}\right)^2 (1 + \varepsilon_n). \tag{17}$$

Nun umschließt aber die Kurve C_γ ein ebenso großes Gebiet wie die Kreislinie k_γ; es ist daher $s_\gamma > 2\pi r_\gamma$, also nach (17). wenn man n über alle Grenzen wachsen läßt:

18) $$\frac{dJ_\gamma}{d\gamma} \geq \frac{di_\gamma}{d\gamma},$$

und daher, weil ja

19) $$J_c = \int_0^c \frac{dJ_\gamma}{d\gamma}\, d\gamma \text{ und } i_c = \int_0^c \frac{di_\gamma}{d\gamma}\, d\gamma \text{ ist,}$$

20) $$J_c \geq i_c;$$

hier aber kann das Gleichheitszeichen nur dann gelten, wenn stets $s_\gamma = 2\pi r_\gamma$ ist, d. h. wenn alle Kurven C_γ Kreise sind.

Zusatz bei der Korrektur: Das im Vorstehenden benutzte Verfahren läßt sich auch bei anderen Aufgaben verwerten, z. B. beim Beweise des Satzes, daß von allen Körpern gleichen Volumens die Kugel die kleinste elektrostatische Kapazität besitzt. Auch hier handelt es sich mathematisch darum, eine Funktion U so zu bestimmen, daß ein Integral wie (3) möglichst klein ausfällt. Doch ist es jetzt ein dreifaches Integral, das über den Raum außerhalb des Körpers zu erstrecken ist; statt (1) und (2) hat man folgende Nebenbedingungen zu beachten: Auf der Oberfläche des Körpers soll U überall den nämlichen Wert annehmen, und es soll

$$\lim_{r \to \infty} r\, U(x, y, z) = 1$$

sein, wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Über die isotherme Teilung.

Von **A. Voss.**

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juli 1923.

Jede quadratische Differentialform $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ einer reellen Fläche (auf die wir uns hier beschränken) läßt sich durch Lösung einer Differentialgleichung auf die isotherme Form $ds^2 = E(du_1^2 + dv_1^2)$ bringen, und durch Einführung der willkürlichen Funktion $u_1 + iv_1 = \varphi(u_2 + iv_2)$ jede andere isotherme Teilung erhalten. Jeder isothermen Teilung entspricht daher eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Funktion einer komplexen Variabeln, wenn man von einem konstanten additiven Teil absieht. Die umgekehrte Frage indessen, wie man aus irgend einer gegebenen isothermen Teilung diese Funktion findet, scheint bisher nicht behandelt zu sein, obwohl sie vielleicht nicht ohne Interesse ist. Dazu schien es passend, in den § I und II einige allgemeinere Bemerkungen vorauszuschicken.

§ I.

Wir betrachten zunächst die Abbildung einer reellen Fläche vom Krümmungsmaß Null auf die Ebene mit den rechtwinkeligen Koordinaten x, y. Soll das Quadrat des Längenelementes

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

die Form $dx^2 + dy^2$ annehmen, so hat man aus den Gleichungen

$$x_u^2 + y_u^2 = e, \qquad x_v^2 + y_v^2 = g, \qquad x_u x_v + y_u y_v = f$$

x und y als Funktionen von u, v zu ermitteln. Setzt man

$$1) \qquad \begin{aligned} x_u &= \varepsilon \cos\varphi, & y_u &= \varepsilon \sin\varphi, \\ x_v &= \gamma \cos\psi, & y_v &= \gamma \sin\psi, \end{aligned}$$

wo $\varepsilon = \sqrt{e}$, $\gamma = \sqrt{g}$ positiv sind, und

2) $$\cos(\varphi - \psi) = \frac{f}{\sqrt{eq}} = \zeta$$

wird, so erhält man aus den Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen 1) durch die Multiplikation mit $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ resp. $\cos\psi$, $\sin\psi$ und Addition derselben

3) $$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\partial \gamma}{\partial u}\cos(\varphi - \psi) &= \gamma\,\psi_u \sin(\varphi - \psi), \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\cos(\varphi - \psi) - \frac{\partial \gamma}{\partial u} &= \varepsilon\,\varphi_v \sin(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Für die Differentialkovariante

3 a) $$z = x_u y_v - x_v y_u = \varepsilon\,\gamma \sin(\psi - \varphi)$$

hat man ferner

4) $$z^2 = eg - f^2,$$

wo z mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen werden kann. Da nach 2) $\sin(\psi - \varphi) = \sqrt{1 - \zeta^2}$, hat $\sqrt{1 - \zeta^2}$ das Vorzeichen von z, und es wird

$$\cos(\psi - \varphi)(\psi_u - \varphi_u) = -\zeta\zeta_u : \sqrt{1 - \zeta^2},$$

oder nach 2)

5) $$\psi_u - \varphi_u = -\frac{\zeta_u}{\sqrt{1 - \zeta^2}}.$$

Eliminiert man aus 3) mittels 5) ψ_u, so hat man

6) $$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right) &= -\psi_u = -\left(\varphi_u - \frac{\zeta_u}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right) &= -\varphi_v. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ist jetzt φ zu bestimmen. Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\right)\right] - \frac{\zeta_u}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 0$$

ist aber hier erfüllt. Setzt man nämlich den Koordinatenwinkel gleich ω, so hat man aus $\cos\omega = \zeta$

$$\omega_u = -\frac{\zeta_u}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\cos\omega - \frac{\partial \gamma}{\partial u}}{\varepsilon \sin\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial \gamma}{\partial u}\cos\omega - \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}}{\gamma \sin\omega}\right) - \omega_{uv} = 0;$$

dies aber ist (vgl. z. B. Darboux, Théorie générale des surfaces II, S. 384) wirklich gleich Null.

Hat man nun aus 6) durch Quadratur φ in der Form $\varphi = \varphi_0 + c$, wo φ_0 eine bestimmte Funktion von u, v ist, ermittelt, so ist $\psi = \varphi_0 + c + \text{arc sin}\sqrt{1-\zeta^2} = \psi_0 + c$ und x, y ergeben sich durch zwei weitere Quadraturen vollständiger Differentiale in der Gestalt

7)
$$x = \int \varepsilon\, du \cos(\varphi_0 + c) + \int \gamma\, dv \cos(\psi_0 + c) + c_3,$$
$$y = \int \varepsilon\, du \sin(\varphi_0 + c) + \int \gamma\, dv \sin(\psi_0 + c) + c_4$$

oder, falls

$$x_1 = \int \varepsilon\, du \cos\varphi_0 + \int \gamma\, dv \cos\psi_0,$$
$$y_1 = \int \varepsilon\, du \sin\varphi_0 + \int \gamma\, dv \sin\psi_0$$

gesetzt wird,

7 a)
$$x = x_1 \cos c - y_1 \sin c + c_3,$$
$$y = y_1 \cos c + x_1 \sin c + c_4,$$

so daß

$$dx^2 + dy^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = dU^2 + dV^2$$

wird. Die Formeln 7 a) sind aber nichts anderes als die der rechtwinkeligen kongruenten oder symmetrischen Transformation, so daß tatsächlich nur eine einzige Lösung entsteht.

Wird bereits $f = 0$ vorausgesetzt, so ist die direkte Rechnung noch einfacher. Denn jetzt ist

$$x_u = \lambda y_u, \qquad y_v = -\lambda x_v$$

und es wird

$$x_u = \frac{\eta \varepsilon \lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ x_v = \frac{\eta_1 \gamma}{\sqrt{1+\lambda^2}};\ y_u = \frac{\eta \varepsilon}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ y_v = \frac{\eta_1 \gamma \lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

wo η und η_1 nach Belieben gleich der positiven oder negativen Einheit zu setzen sind, während aus 8) jetzt die Gleichungen

$$\frac{\lambda_u}{1+\lambda^2} = -\frac{\eta}{\eta_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\frac{1}{\gamma}, \qquad \frac{\lambda_v}{1+\lambda^2} = \frac{\eta_1}{\eta}\frac{\partial \gamma}{\partial u}\frac{1}{\varepsilon}$$

folgen, so daß

$$9) \qquad \operatorname{arc\,tg}\lambda = \frac{\eta}{\eta_1}\int\left(\frac{\partial \gamma}{\partial u}\frac{dv}{\varepsilon} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\frac{du}{\gamma}\right) + \text{const.}$$

sich ergibt, und damit sind x, y vollständig bestimmt.

§ II.

Die durch Fortlassung selbstverständlicher Gleichungen viel kürzer darstellbare Betrachtung des § I, welche einfacher sein dürfte, als die sonst wohl gebräuchlichen, läßt sich für jede developpabele Fläche verallgemeinern. Bekanntlich ist die Ebene die einzige Fläche, deren sämtliche Biegungen sich bisher durch Quadraturen haben bestimmen lassen, während durch die ausgezeichneten Arbeiten von Darboux, Bianchi und anderen in zahlreichen speziellen Fällen das Boursche Problem seine Lösung gefunden hat.

Setzt man in § I, 7)

$$U = \int(\varepsilon\, du \sin\varphi_0 + \gamma\, dv \cos\psi_0),$$
$$V = \int(\varepsilon\, du \cos\varphi_0 + \gamma\, dv \sin\psi_0),$$

so ist $ds^2 = dU^2 + dV^2$; U und V sind bekannte Funktionen von u, v, wobei ds^2 in § I das Krümmungsmaß Null hat.

Es seien nun

$$1) \qquad \begin{aligned} X &= x + (v_1 - u_1)\alpha, \\ Y &= y + (v_1 - u_1)\beta, \\ Z &= z + (v_1 - u_1)\gamma \end{aligned}$$

die Koordinaten einer Developpabeln F; x, y, z die eines Punktes ihrer von dem Bogenelement du_1 abhängigen Gratlinie, α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente derselben, R der Krümmungshalbmesser, so daß

$$R^2 = \frac{1}{\alpha_{u1}^2 + \beta_{u1}^2 + \gamma_{u1}^2},$$

dann ist nach 1) das Quadrat des Längenelementes von F gegeben durch

$$ds^2 = dv_1^2 + du_1^2\frac{(v_1 - u_1)^2}{R^2}.$$

Setzt man jetzt

$$\xi = v_1 \cos u_0 + \int d u_0 u_1 \sin u_0,$$
$$\eta = v_1 \sin u_0 - \int d u_0 u_0 \cos u_0,$$

wo u_0 eine passend zu wählende Funktion von u_1 allein ist, so wird

$$d\xi^2 + d\eta^2 = dv_1^2 + du_0^2 (v_1 - u_1)^2.$$

Setzt man endlich

$$u_0 = \int \frac{d u_1}{R},$$

so wird $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = ds^2$. Um also die gegebene Fläche F als Verbiegung der Ebene ξ, η zu erhalten, hat man aus den Gleichungen

$$\xi = U = \varphi(u_1 v) = \Phi(u_1, v_1),$$
$$\eta = V = \psi(u_1 v) = \Psi(u_1, v_1)$$

u_1, v_1 als Funktionen von u, v zu ermitteln; die Lösung enthält noch die willkürliche Funktion R. Verlangt man insbesondere, daß die Fläche F eine gegebene Krümmung und Torsion ihrer Gratlinie habe, so muß man allerdings die betreffende Riccatische Gleichung lösen, die nun die Koordinaten x, y, z und damit auch R bestimmt, so daß eine ganz bestimmte Transformation entsteht.

§ III.

Ist eine Developpable mittels der Gleichung

$$dx^2 + dy^2 = E(du^2 + dv^2) = ds^2,$$

wobei $\sqrt{E} = \varepsilon$ isotherm auf die Ebene x, y abgebildet, so ist

$$dx + i\,dy = \varepsilon\lambda(du + i\,dv),$$
1) $$dx - i\,dy = \frac{\varepsilon}{\lambda}(du - i\,dv,$$

so daß λ Funktion von u, v ist, so wird nach 1)

$$dx - i\,dy = \varepsilon\bar{\lambda}(du - i\,dv)$$

für $\bar{\lambda}$ als konjugierte Funktion von λ. Aus 1) folgt jetzt

$$\lambda\bar{\lambda} = 1, \text{ oder } \lambda = e^{i\omega}.$$

Nun hat man aus 1)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + i\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial v} = i \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

oder

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} = -\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial v},$$

also

$$\text{I)} \qquad \omega = \int \left(\frac{\partial l\varepsilon}{\partial u} dv - \frac{\partial l\varepsilon}{\partial u} du \right) + \text{const.},$$

woraus

$$\text{II)} \quad x + yi = C \int e^{i \int \left(\frac{\partial l\varepsilon}{\partial u} dv - \frac{\partial l\varepsilon}{\partial u} du \right)} \varepsilon (du + i\, dv) + \text{const.}$$

mit den komplexen Konstanten C, c, die man übrigens auch gleich 1 und 0 setzen kann.

Damit ist aber die Funktion $x + yi$, deren Ausdruck in $u + iv$ bei gegebenem ε gesucht wurde, völlig bestimmt.

Man kann nun auch umgekehrt die Formel II) direkt beweisen. Setzt man das Längenelement in der Form $ds^2 = dx^2 + dy^2$ voraus, so ist, falls

$$(x + yi) = f(u + iv) = U + iV$$

ist,

$$U_u = V_v, \quad U_v = -V_u, \quad U_{uu} + U_{vv} = 0.$$

Da jetzt $\varepsilon = \sqrt{U_u^2 + U_v^2}$ wird, hat man

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial l\varepsilon}{\partial u} = \frac{U_u U_{uu} + U_v U_{vu}}{U_u^2 + U_v^2},$$

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial l\varepsilon}{\partial v} = U_u U_{uv} + U_v U_{vv}.$$

Setzt man rechts in a) $U_{uu} = -U_{vv}$, in b) $U_{vv} = -U_{uu}$ und

$$z = U_u, \quad \zeta = U_v,$$

so wird

$$\frac{\partial l\varepsilon}{\partial u} = \frac{\zeta z_v - \zeta_v z}{z^2 + \zeta^2}, \qquad \frac{\partial l\varepsilon}{\partial v} = \frac{z\zeta_u - \zeta z_u}{z^2 - \zeta^2}.$$

Für

$$\operatorname{arctg} \frac{\zeta}{z} = \omega, \quad \varepsilon = \sqrt{z^2 + \zeta^2}, \quad \cos\omega = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \zeta^2}}, \quad \sin\omega = \frac{\zeta}{\sqrt{z^2 + \zeta^2}}$$

folgt also

$$\frac{\partial l\varepsilon}{\partial u}\,dv - \frac{\partial l\varepsilon}{\partial v}\,du = -\,d\omega,$$

so daß das Integral II) übergeht in

$$\int (du + i\,dv)\,|z - i\zeta|.$$

Aber der Integrand ist jetzt nichts anderes als

$$du\,U_u + i\,dv\,U_u - i\,du\,U_v + dv\,U_v$$

oder $\quad du\,U_u + dv\,U_v + i(du\,V_u + dv\,V_v) = d(U + iV).$

Ist nur ein isothermes Längenelement beliebig gegeben, so ist zwar $E = U^2 + V^2$; es handelt sich dann um die Bestimmung von U und V. Es ist also die Bestimmung des Integrals II erforderlich, um die zugehörige Funktion $x + yi$ zu finden. Allerdings kann man ja auch direkt aus E die beiden Bestandteile U und V ermitteln, dies führt aber gerade zu derselben Formel II, weshalb dies hier nicht wiederholt werden soll.

§ IV.

Es ist vielleicht nicht unpassend, einige Beispiele anzuführen. In den einfachsten Fällen (Polarkoordinaten, rationale ganze Funktionen etc.) macht die Berechnung des Integrals in § III keine Schwierigkeit. Ist z. B.

I) $\quad E = (2u + 1)^2 + 4v^2, \quad \varepsilon = \sqrt{(2u + 1)^2 + 4v^2},$

so wird

$$\frac{\partial l\varepsilon}{\partial u}\,dv - \frac{\partial l\varepsilon}{\partial v}\,du = d\,\operatorname{arctg}\left(\frac{2v}{2u + 1}\right).$$

Setzt man nun

$$2v = \varrho \sin\omega, \qquad 2u + 1 = \varrho\cos\omega,$$

so wird

$$x + yi = \int (\cos\omega + i\sin\omega)\,\varrho\,(du + i\,dv) + \text{const.}$$

oder für $c = 0$

$$x + yi = (u + iv)^2 + (u + iv).$$

II) Nimmt man $z = \sin(u + iv)$, so wird

$$dz = \cos(u + iv)\,(du + i\,dv),$$
$$\overline{dz} = \cos(u - iv)\,(du - i\,dv),$$
$$\varepsilon = {}^1/_2\sqrt{e^{2v} + e^{-2v} + 2\cos 2u} = {}^1/_2\,\Delta.$$

Es ist also

$$z = \int e^{-i} \int \frac{(e^{2v} - e^{-2v})\,du + 2\sin(2u)\,dv}{\Delta^2}\, \varepsilon(du + i\,dv)$$

zu berechnen. Aus der Identität

$$d\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(u\,\frac{e^{v} - e^{-v}}{e^{v} + e^{-v}}\right)\right)\right) = \frac{(e^{2v} - e^{-2v})\cdot du + 2\sin(2u)\,dv}{\Delta^2}$$

auf die man aus § III geführt wird, erhält man dann z, wenn man

$$\sin u\,(e^{v} - e^{-v}) = \varrho \sin\omega,$$
$$\cos u\,(e^{v} - e^{-v}) = \varrho \cos\omega$$

setzt, so daß in der Tat die Sinusfunktion entsteht.

III) Konfokale Kegelschnitte. Nimmt man

$$x = {}^1/_2\left(u_1 + \frac{1}{u_1}\right)\sin v_1, \quad y = {}^1/_2\left(u_1 - \frac{1}{u_1}\right)\cos v_1,$$

so wird

$$x + yi = {}^1/_2\, i\left(u_1 e^{-iv_1} - \frac{1}{u_1}\, e^{iv_1}\right) \text{ für}$$

$$u_1 = e^{-u}, \qquad v_1 = -v$$

die Gleichung

$$E_1 = {}^1/_4\,(e^{2u} + e^{-2u} + e^{2iv} - e^{-2iv})$$

liefern, so daß ε gerade denselben Wert wie im Falle II erhält, so daß sich das bekannte Resultat ergibt. Die direkte Bestimmung des Integrals würde hier schon weitläufig ausfallen.

IV) Etwas anders liegt die Sache aber beim isothermen System konjugierter Kreisbüschel.

Die orthogonalen Kreisbüschel

1)
$$x^2 + y^2 - 2ux + k^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2vx - k^2 = 0$$

geben für $u > k$ zur Bestimmung der reellen Schnittpunkte der Kreise

2)
$$ux - vy = k^2.$$

Setzt man

$$x = \frac{k^2}{u - vt}, \qquad y = \frac{k^2 t}{u - vt},$$

so ist nach 1)

$$4) \qquad t^2 = \frac{u^2 - k^2}{k^2 + v^2}.$$

Die Differentiation von 1) liefert

$$(x - u)\,dx + y\,dy = x\,du,$$
$$x\,dx + (y - v)\,dy = y\,dv$$

oder nach 3) für $\sigma = (x - u)(y - v) - xy$

$$\sigma\,dx = x(y - v)\,du - y^2\,dv,$$
$$\sigma\,dy = y(x - u)\,dv - x^2\,du$$

oder

$$dx^2 + dy^2 = k^4\,\frac{du^2(k^2 + v^2) + dv^2(u^2 - k^2)\,t^2}{\sigma^2(u - vt)^2}.$$

Setzt man aus 4) t und t^2 rechts ein, so wird

$$-\sigma = \frac{(u\sqrt{k^2 + v^2} - v\sqrt{u^2 - k^2})\sqrt{u^2 - k^2}}{u - vt},$$

also

$$5) \quad dx^2 + dy^2 = k^4(u^2 - k^2)(v^2 + k^2)\,\frac{\left(\left(\frac{du}{u^2 - k^2}\right)^2 + \left(\frac{dv}{k^2 - v^2}\right)^2\right)}{(u\sqrt{v^2 + k^2} - v(\sqrt{u^2 - k^2})^2}.$$

Diese isotherme Teilung ist jetzt auf ihre Normalform zu bringen. Setzt man nun in 5)

$$\frac{u - k}{u + k} = e^{2u_1}, \quad \operatorname{arctg}\frac{v}{k} = v_1 \text{ oder } v = k\operatorname{tg} v_1,$$

so wird

$$v^2 + k^2 = \frac{k^2}{\cos^2 v_1}, \qquad \frac{dv}{v^2 + k^2} = \frac{1}{k}\,dv_1,$$

$$u = -k\,\frac{e^{u_1} + e^{-u_1}}{e^{u_1} - e^{-u_1}},$$

$$u^2 - k^2 = \frac{4k^2}{(e^{u_1} - e^{-u_1})^2}\qquad \frac{du}{u^2 - k^2} = dl\sqrt{\frac{u - k}{u + k}}$$

und nach einfacher Zwischenrechnung

$$6) \qquad dx^2 + dy^2 = \frac{4k^2(du_1^2 + dv_1^2)}{(e^{u_1} + e^{-u_1} + 2\sin v_1)^2},$$

so daß

$$\varepsilon = \frac{2k}{e^{u_1} + e^{-u_1} + 2\sin v}$$

folgt, womit auch w bestimmt ist.

Als Vergleichsfunktion bei der Bestimmung des vollständigen Differentials kann hier

$$X + Yi = k \operatorname{arctg}(U + iV)$$

dienen. Es wird dann

$$dX^2 + dY^2 = \frac{16k^2(dU^2 + dV^2)}{(e^{2v} + e^{-2v} + 2\cos 2U)^2},$$

also wenn ε_1 und ω_1 die zu ε und ω entsprechenden Zahlen bedeuten

$$\varepsilon_1 = \frac{4k}{e^{2V} + e^{-2V} + 2\cos 2U}$$

derart, daß

$$k \operatorname{tg}(U + iV) = \int e^{i\omega_1} \varepsilon_1 (dU + i\,dV)$$

eine Identität wird, wenn ω_1 aus den Differentialquotienten des $l\,\varepsilon_1$ entnommen wird. Setzt man nun

$$2U = \pi/2 - v_1, \quad 2V = -u_1,$$

so wird, da ε_1 bis auf einen konstanten Faktor in ε übergeht, der im $l(\varepsilon_1)$ beim Differentiieren herausfällt, wenn man endlich noch in dem zu suchenden Integrale diese Werte einführt, sein Wert auf

$$k \operatorname{tg}\left(i\frac{u_1}{2} + \frac{v_1}{2} - \pi/4\right)$$

zurückgeführt, und hierdurch ist die Funktion der komplexen Variabeln $u_1 i + v_1$ völlig bestimmt durch einen einfachen Ausdruck in $\operatorname{tg}\left(\frac{u_1 + iv_1}{2}\right)$.

Zur Theorie der Raumkurven.

Von **A. Voss.**

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juli 1923.

I.

Abwickelbare Flächen durch eine gegebene Kurve.[1])

§ 1.

Es sei P ein Punkt der Raumkurve C, dessen Koordinaten x, y, z Funktionen der Bogenlänge s sind, α, β, γ; ξ, η, ζ; λ, μ, ν die den Frenetschen Formeln genügenden Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale (d. h. gegen die Kanten des Triëders von C), endlich ϱ, τ die Radien der Krümmung und Windung von C. Durch P sei eine Strecke PQ gezogen, deren Projektionen u, v, w auf die Triëderaxen die erzeugende Gerade g einer abwickelbaren Fläche bestimmen. Die Koordinaten von Q sind dann

1) $$X = x + u\alpha + v\zeta + w\lambda^2)$$

Geht man auf C von P aus um ds fort, so ist

2) $$dX = \left(\alpha + u\frac{\xi}{\varrho} - v\left(\frac{\alpha}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right) + w\frac{\xi}{\tau} + \alpha u' + \beta v' + \lambda w'\right) ds.$$

Soll der Punkt $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ auf den von Q um δ entfernten Punkt Q_1 von PQ fallen, so hat man

2 a) $$dX = \delta\,(u\alpha + v\xi + w\lambda)$$

und die Vergleichung von 2) und 2 a) liefert dann

[1]) Die Gleichungen 1) und 2) gelten auch für die Vertauschung von $X\alpha\xi\lambda$ mit $Y\beta\eta\mu$ und $Z\gamma\zeta\nu$. Die Striche bezeichnen die Differentialquotienten nach s.

$$\delta u = \left(1 - \frac{v}{\varrho} + u'\right) ds$$

3) $$\delta v = \left(\frac{u}{\varrho} + \frac{w}{\tau} + v'\right) ds$$

$$\delta w = \left(-\frac{v}{\tau} + w'\right) ds,$$

oder, wenn der im allgemeinen von Null verschiedene $\delta : ds$ durch σ bezeichnet wird,

$$\sigma u = 1 - \frac{v}{\varrho} + u'$$

3a) $$\sigma v = \frac{u}{\varrho} + \frac{v}{\tau} + v'$$

$$\sigma w = -\frac{v}{\tau} + w'.$$

Ist $w \neq 0$,[1]) so hat man

$$\frac{u}{w} = 1 - \frac{v}{\varrho} + u' : w' - \frac{v}{\tau},$$

$$\frac{v}{w} = \frac{u}{\varrho} + \frac{w}{\tau} + v' : w' - \frac{v}{\tau},$$

oder

4) $$\frac{1}{w} - \frac{v}{\varrho w} + \frac{u}{w}\frac{v}{w}\frac{1}{\tau} + \frac{d\frac{u}{w}}{ds} = 0,$$

5) $$\frac{u}{w\varrho} + \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{v^2}{w^2}\right) + \frac{d\frac{v}{w}}{ds} = 0,$$

also für $\frac{1}{w} = \sigma_1$, $\frac{v}{w} = \sigma_2$, $\frac{u}{w} = \sigma_3$,

4a) $$\sigma_1 - \frac{\sigma_2}{\varrho} + \frac{\sigma_2\sigma_3}{\tau} + \frac{d\sigma_3}{ds} = 0,$$

5a) $$\frac{\sigma_3}{\varrho} + \frac{1 + \sigma_2^2}{\tau} + \frac{d\sigma_2}{ds} = 0.$$

---

[1]) $w = 0$ ist überhaupt auszuschließen; dieser Annahme entspricht nur die durch die Tangentenfläche von C gebildete Abwickelbare.

Schon hieraus lassen sich einige Schlüsse hinsichtlich der Integration des Systems 3a) ziehen.

Erstens. Wird σ_3 willkürlich angenommen, so ist σ_2 durch eine Biccatische Gleichung 5a) gegeben, damit also nach 4a) auch σ_1.

Zweitens. Wird σ_2 willkürlich gewählt, so liefert 5a) den Wert von σ_3, dann 4a) auch σ_1 so daß nun u, v, w ohne jede Integration gefunden werden, d. h. unendlich viele abwickelbare Flächen durch C bestimmt sind.

Drittens. Werden $\frac{u}{w}$ und v als Konstanten c_1 und c_2 angenommen, so gibt 4)

$$1 - \frac{c_2}{\varrho} + \frac{c_1}{\tau} = 0.$$

Dies ist die bekannte Gleichung, welcher eine Bertrandsche Kurve C genügen muß; dabei muß aber noch die Gleichung

$$\frac{c_1}{\varrho} + \left(1 + \left(\frac{c_2}{w}\right)^2\right)\frac{1}{\tau} + \frac{d}{ds}\left(\frac{c_1}{w}\right) = 0$$

erfüllt sein, also w einer Ricccatischen Gleichung genügen, womit eine besondere Gattung Bertrandscher Kurven definiert ist.[1])

Viertens. Ist $u = 0$, so ist nach 4) $v = \varrho$ und aus 5) folgt

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{v}{w}\right) + \int \frac{ds}{\tau} = \text{Const.},$$

das ist die bekannte Gleichung für die Konstruktion der Filarevoluten von C.

Fünftens. Es kann auch beständig σ gleich Null sein, dies entspricht einem besonderen Falle, der hier der Kürze halber nicht weiter verfolgt werden soll, für allgemeine Schraubenlinien sich leicht durch Quadratur behandeln läßt.

---

[1]) Man kann hier die Konstruktion für die gemeine Schraubenlinie aller dieser abwickelbaren Flächen durch Quadratur bemerken.

§ 2.

Etwas einfachere Gleichungen ergeben sich noch, wenn man, um insbesondere das Problem der Traktrix-Evoluten von C in seiner allgemeinsten Gestalt in Betrachtung zu ziehen,[1])

$$u = at, \quad v = bt, \quad w = ct$$

mit der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ setzt, so daß nun a, b, c die Richtungscosinus von g gegen die Triëderaxen sind, und t die Entfernung PQ bedeutet. Multipliziert man die Gleichungen 3) des § 1

$$1 - \frac{tb}{\varrho} + t'a + a't = \sigma at$$

$$\frac{at}{\varrho} + \frac{tc}{\tau} + t'b + b't = \sigma bt$$

$$-\frac{bt}{\tau} + t'c + tc' = \sigma ct$$

mit a, b, c und addiert, so folgt

1) $$a + t' = \sigma t,$$

also:

$$1 - \frac{tb}{\varrho} + a't - a^2 = \Xi = 0$$

2) $$\frac{at}{\varrho} + \frac{tc}{\tau} + b't - ab = H = 0$$

$$-\frac{tb}{\tau} + c't - ac = Z = 0,$$

so daß t' ganz herausfällt. Da jetzt

$$a\Xi + bH + cZ = a - a^3 - ab^2 - ac^2 = 0$$

ist, so wird falls $a \neq 0$ ist, durch die beiden letzten Gleichungen von 2) durch die erste erfüllt.

Setzt man jetzt

3) $$b = \sqrt{1 - a^2}\cos\varphi$$
$$c = \sqrt{1 - a^2}\sin\varphi$$

[1]) Davon wird hier indes der Kürze wegen nicht wieder gehandelt.

so erhält man durch Elimination von t aus 2), wobei $c \neq 0$ anzunehmen ist,

$$4) \qquad \frac{ac}{\varrho} + \frac{1-a^2}{\tau} + cb' - bc' = 0$$

und aus 3)

$$b'c - c'b = -(1-a^2)\frac{d\varphi}{ds}.$$

Aus 4) wird jetzt

$$5) \qquad \frac{a}{\varrho}\sin\varphi + \frac{\sqrt{1-a^2}}{\tau} - \frac{d\varphi}{ds}\sqrt{1-a^2} = 0.$$

Um diese Differentialgleichung auf ihre einfachste Form zu bringen, setze man

$$\cos\varphi = \frac{2\theta}{1+\theta^2}, \quad \sin\varphi = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2},$$

womit $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{2\,d\theta}{ds} : 1+\theta^2$ wird. So wird aus 5) die Riccatische Gleichung:

$$6) \qquad \frac{2\,d\theta}{ds} = \frac{1}{\varrho}\left(\left[\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{\varrho}{\tau}\right] + \theta^2\left[\frac{\varrho}{\tau} - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right]\right).$$

Sie bestimmt bei konstantem ϱ/τ d. h. für jede Schraubenlinie bei konstanten a das gesuchte θ durch Quadratur, und es scheint von Interesse, daß man für diejenigen Erzeugenden von abwickelbaren Flächen, welche einen konstanten Winkel mit der Kurventangente einschließen, die Verallgemeinerung der Gleichung der Filarevoluten (vgl. § 1, unter viertens) erhält.

Haben nämlich

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\frac{\tau}{\varrho} + 1, \quad 1 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\frac{\tau}{\varrho}$$

gleiches Vorzeichen, so daß etwa das erste mit $\pm p^2$, das zweite mit $\pm q^2$ bezeichnet wird, so hat man

$$\frac{2\,d\theta}{p^2 + q^2\theta^2} = \pm\frac{ds}{\tau}.$$

Da aber bei der Ableitung der Gleichung 5) a nicht als konstant vorausgesetzt ist, so ist die Integration durch einen

arcus tangens[1]) auch dann nur möglich, wenn nur das Verhältnis von

$$\frac{a}{\varrho\sqrt{1-a^2}} + \frac{1}{\tau} : \frac{1}{\tau} - \frac{a}{\varrho\sqrt{1-a^2}}$$

konstant $= k$ oder

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{k-1}{k+1}\frac{\tau}{\varrho}$$

ist. Hierdurch sind für jede Kurve C ∞^1 abwickelbare Flächen durch C bestimmt.

II.

Zur Theorie der Raumkurven.

B. de St. Venant (1844) und J. Bertrand (1848/50) bemerkten, daß das Verhältnis $\varrho : \tau = w$ der Krümmungs- und Windungsradien für jede zylindrische Schraubenlinie konstant, und auch umgekehrt jede Kurve mit konstantem w eine solche Schraubenlinie ist. Dieser Satz findet sich z. B. in den gebräuchlichen Lehrbüchern (L. Bianchi, Differentialgeometrie, Leipzig, S. 17, G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven, 2. Aufl. 1910, Bd. I S. 302, dort auch mit Berücksichtigung des besonderen Falles $w = i$).[2]) Verallgemeinerungen des Satzes scheinen bisher nicht erwähnt zu sein. In der Tat hängt auch die Untersuchung weiterer Fragen meistens von nicht einfachen Differentialgleichungen ab. Einige Fälle übersichtlicher Art mögen hier jedoch angeführt werden.

§ 1.

Soll die Gerade g oder PQ von I, deren Projektionen auf die Triëderaxen p, q, r sind, mit einer festen Geraden, deren Richtungscosinus c_1, c_2, c_3 sind, einen konstanten Winkel θ bilden, so ist

$$1) \qquad (ac)\,p + (\lambda c)\,q + (\xi c)\,r = \cos\theta \cdot \sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Dabei kann neben $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ auch $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ angenommen werden. Zur Abkürzung ist in 1) gesetzt:

$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = (ac), \quad c_1 + \eta c_2 + \zeta c_3 = (\xi c),$$
$$\lambda c_1 + \mu c_2 + \nu c_3 = (\lambda c).$$

[1]) oder bei ungleichen Vorzeichen durch einen Logarithmus.

[2]) Hier sollen nur reelle Kurven betrachtet werden.

Durch ein- und zweimalige Differentiation nach dem Bogen s der Kurve C erhält man aus 1) zwei weitere Differentialgleichungen zwischen p, q, r, ϱ, τ, die aber im allgemeinen so weitläufig sind, daß man sich auf konstante p, q, r zunächst beschränken wird.

A) Erster Fall. Ist

$$1) \qquad (ac) + p(\lambda c) = k, \left(\cos\theta = \frac{k}{\sqrt{1+p^2}}\right),$$

so schließt g in der rektifizierenden Ebene mit der Tangente von C einen konstanten Winkel ein. Aus 1) folgt:

$$2) \qquad (\xi c)(1 + pw) = 0$$

$$3) \qquad [(ac + w(\lambda c)](1 + wp) + (\xi c)\, p\varrho w' = 0.$$

Ist nun w nicht konstant, so kann man immer voraussetzen, daß für einen gewissen Bereich von C, $1 + wp \neq 0$ sei. Dann hat man aus 1), 2), 3):

$$\begin{aligned} (ac) &= kw : w - p \\ (\lambda c) &= -k : w - p \\ (\xi c) &= 0 \end{aligned} \qquad 4\,a)$$

oder

$$4\,b) \qquad 1 = k^2(w^2 + 1) : (w - p)^2.$$

Es ist daher

$$w(1 - k^2) = p \pm \sqrt{p^2 + 1 - k^2}$$

reell für $|k| < 1$, und dieser Bedingung möge k in diesem Bereich genügen. Es ist dann daselbst $1 + wp \neq 0$. Wäre nämlich irgendwo $w = -1 : p$, so müßte nach 4 b)

$$\frac{(1+p^2)^2}{p^2} = k^2 \frac{(1+p^2)}{p^2}$$

oder

$$k^2 = 1 + p^2 \text{ sein.}$$

Auch kann w nicht gleich p sein, weil sonst $w^2 + 1 = 0$ gegen die Voraussetzung, daß w reell sein soll, sein müßte. Die Gleichungen 4 a) bleiben also völlig bestimmt, und die Annahme, daß w variabel sei, führt nach 4 b) auf den Widerspruch, daß w konstant sein muß. Es ergibt sich also:

Soll die Gerade g in der rektifizierenden Ebene,

die einem konstanten Winkel mit der Tangente bildet, zu einer festen Richtung eine konstante Neigung haben, so muß die Kurve eine Schraubenlinie sein. Dies ist eine sehr nahe liegende Verallgemeinerung des Bertrandschen Satzes.

B) Zweiter Fall. Es sei $(\xi c) + (\lambda c)\, p = 0$, d. h. die Gerade g in der Normalebene, die mit der Hauptnormale einen konstanten Winkel bildet, soll zu einer festen Richtung senkrecht stehen. Diese Bedingung liefert

$$(ac) + w(\lambda c) + wp^2(\lambda c) = 0$$
$$(\lambda c)\,[p\,(1 + w^2\,(1 + p^2)) - \varrho w\,(1 + p^2)] = 0.$$

Dies gibt, da $(\lambda c) = 0$ auch $(ac) = 0$, $(\xi c) = 0$ nach sich ziehen würde,

$$\frac{w'}{1 + w^2\,(1 + p^2)} = \frac{p}{1 + p^2}\,\frac{1}{\varrho},$$

also bei willkürlich angenommenen ϱ einen arctg in Bezug auf das Integral $\int \frac{ds}{\varrho}$ + const. für w und damit auch τ.

C) Dritter Fall. Setzt man für eine Gerade in der Schmiegungsebene

$$(\xi c) + (ac)\, p = 0.$$

Man erhält auf demselben Wege die Gleichung

$$p\,(1 + p^2 + w^2) - \frac{w'}{w\varrho}\,(1 + p^2) = 0,$$

woraus ein ganz ähnliches Resultat folgt. Die betreffenden Kurven C sind hierdurch also völlig bestimmt; ihre Gleichungen in Punktkoordinaten wird man freilich nur durch Integration einer Riccatischen Gleichung erhalten.

D) Der allgemeinere Fall

1) $$(ac)\, p + (\lambda c)\, q + (\xi c)\, r = 0$$

gibt unter der Voraussetzung $r \neq 0$

2) $$(ac)\,[p^2 + pqw + r^2] + (\lambda c)\,[qp + w'\,(q^2 + r^2)] = 0,$$

3) $$(ac)\,[w'\varrho r p q - p\,T) + (\lambda c)\,[(q^2 + r^2)\,w'\varrho r - q\,T] = 0,$$

wenn

$$T = p^2 + 2pqw + w^2 q^2 + r^2\,(1 + w^2) = (p + qw)^2 + r^2\,(1 + w^2)$$

gesetzt wird. Aus 1), 2), 3) folgt dann die Differentialgleichung für w, welche entwickelt die einfache Gestalt

$$\frac{r w' w}{(w p - q)} (p + q w^2) + r^2 (1 + w^2) = \frac{ds}{\tau}$$

annimmt, aus deren Lösung wieder ϱ folgt.

E) Soll die Hauptnormale mit einer festen Richtung einen konstanten Winkel bilden, so hat man

$$(\xi c) = k$$

zu setzen. Dies gibt die Gleichungen

$$(\alpha c) = + \frac{k w}{\varrho w'}$$
$$(\xi c) = k$$
$$(\lambda c) = - \frac{k(1 + w^2)}{\varrho w'},$$

also

$$\left(\frac{1 + w^2}{\varrho^2 w'^2}\right)^3 k^2 = 1.$$

Hieraus folgt wieder $\frac{w}{\sqrt{1 + w^2}} = \pm \int \frac{ds}{\varrho} + c$ und damit τ.

§ 2.

In einigen Fällen kann man auch p und w gleichzeitig als veränderlich ansehen.

A) Erster Fall.

1) $$(\xi c) + (\alpha c) p = 0$$

2) $$(\alpha c)[p' \varrho - (1 + p^2)] - w (\lambda c) = 0.$$

Setzt man

3) $$S = p' \varrho - (1 + p^2),$$

so gibt die Differentiation von 2)

$$- (\alpha c)(S - w^2) p + \varrho (\alpha c) \frac{dS}{ds} - (\alpha c) S \varrho \frac{w'}{w} = 0$$

oder

$$- S \left\{ p + \varrho \frac{w'}{w} \right\} + w^2 p + \varrho \frac{dS}{ds} = 0.$$

Setzt man jetzt $p = k\varrho$, also den Teilungsmodus der Geraden g in der Schmiegungsebene proportional dem Krümmungsradius, so hat man, da ϱ herausfällt, eine lineare Differentialgleichung einfachster Art bei angenommenem w für S. Setzt man den Wert von S in 3) ein, so erhält man

$$S = k\varrho\varrho' - (1 + k^2\varrho^2),$$

also eine lineare Differentialgleichung für ϱ^2, und damit den zugehörigen Wert von τ.

B) Zweiter Fall.

Setzt man

1) $$(\xi c) + (\lambda c) p = 0, \quad (g \text{ in der Normalebene}),$$

so wird für

2) $$\Sigma = p'\varrho - w(1 + p^2)$$

3) $$(\lambda c)\Sigma - (\alpha c) = 0,$$

also

4) $$\varrho \frac{d\Sigma}{ds} - p(\Sigma w - 1).$$

Für $p = \varrho k$ erhält man wieder eine lineare Differentialgleichung für Σ, und dann aus 2) eine lineare Differentialgleichung für ϱ^2.

C) Dritter Fall.

1) $$(\alpha c) + (\lambda c) p = 0$$

2) $$(\xi c)(1 + pw) + (\lambda c) p'\varrho.$$

Es sei $1 + pw \neq 0$ in dem gewählten Bereich der Kurve C, so daß für $p'\varrho = (1 + pw) q$

$$(\xi c) + (\lambda c) q = 0 \text{ ist.}$$

Hieraus folgt weiter

3) $$-((\alpha c) + (\lambda c) w) + (\xi c) q w + (\lambda c) q'\varrho = 0.$$

Aus 1), 2), 3) folgt jetzt, wenn (λc) nicht Null sein soll, was auch $(\alpha c) = 0$, $(\xi c) = 0$ zur Folge haben würde,

4) $$p - w - q^2 w + q'\varrho = 0.$$

Wählt man jetzt $p = kw$, also proportional dem Verhältnis der Krümmungs- und Windungsradien, so wird aus 4)

$$w[k-1) - q^2 w + q'\varrho = 0, \text{ oder}$$
$$(k-1)\,q^2 + q'\tau = 0,$$

welche Gleichung q mittels τ bestimmt.

Setzt man jetzt noch

$$q = \frac{w'k\varrho}{1+kw^2}, \text{ und } \varrho = w\tau,$$

so hat man wieder eine Gleichung für w, also auch ϱ, falls τ als Funktion von s angenommen ist.

III.

Über die Minimalkurven.

Unter einer Minimalkurve kann man alle diejenigen Kurven verstehen, deren Koordinaten der Gleichung

1) $$(x'z'' - z'x'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 = 0$$

genügen. Bezeichnet man die drei Determinanten in 1) durch u, v, w, so folgt aus

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

wenn man nur den trivialen, nur gerade Linien liefernden Fall $u = v = w = 0$ ausscheidet, in bekannter Weise das System der Gleichungen

$$y'z'' - z'y'' = (\lambda^2 - 1)\,w$$
2) $$z'x'' - x'z'' = (\lambda^2 + 1)\,iw$$
$$x'y'' - y'x'' = 2\lambda w,$$

wo w ein Proportionalitätsfaktor und λ irgend eine Funktion der unabhängigen Variabeln t ist. Multipliziert man die Gleichungen 2) mit x', y', z'; x'', y'', z'' und addiert, so erhält man

3) $$(\lambda^2 - 1)\,x' + (\lambda^2 + 1)\,y'i + 2\lambda z' = 0$$

4) $$(\lambda^2 - 1)\,x'' + (\lambda^2 + 1)\,y''i + 2\lambda z'' = 0,$$

da von $w = 0$ abzusehen ist. Differentiiert man 3) nach t, so folgt nach 4)

5) $$\lambda'(\lambda(\alpha' + iy') + z') = 0.$$

Es sind demnach zwei wesentlich verschiedene Lösungen vorhanden. Entweder ist $\lambda' = 0$, also λ eine Konstante, oder es ist λ eine Funktion von t und dann muß die Gleichung

$$6) \qquad \lambda(x' + iy') + z' = 0$$

erfüllt sein.

Im ersten Falle folgt aus 3)

$$(\lambda^2 - 1)x + iy(\lambda^2 + 1) + 2\lambda z = \text{const.},$$

es ergeben sich ebene Kurven. Soll eine solche Kurve durch den Punkt x_0, y_0, z_0 gehen, so ist

$$7) \quad (\lambda^2 - 1)(x - x_0) + i(\lambda^2 + 1)(y - y_0) + 2\lambda(z - z_0) = 0$$

und die Ebenen dieser Kurve umhüllen den isotropen Kegel mit der Spitze x_0, y_0, z_0. Die expliziten Gleichungen der Kurven, erhält man, wenn x und y als willkürliche Funktionen von t angenommen werden, und aus 7) z bestimmt wird. Aus der zweimal differentiierten Gleichung folgen dann wieder die Ausdrücke für u, v, w, so daß man jedesmal unendlich viele Kurven durch x_0 y_0 z_0 erhält.

Im zweiten Falle hat man

$$\lambda(x' + iy') + z' = 0$$
$$(\lambda^2 - 1)x' + i(\lambda^2 + 1)y' + 2\lambda z' = 0$$

und erhält hieraus die Minimalkurven erster Ordnung nach der Bezeichnung von G. Scheffers (Einführung in die Theorie der Kurven, 1910, Bd. I, S. 242—243), dessen Darstellung hier durch eine etwas andere Anordnung ersetzt ist.

Die Flächen mit gegebener Form des Linienelementes.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juli 1923.

Wie ich in einer früheren Abhandlung[1]) gezeigt habe, ist die Benutzung der Parameter der Minimalkurven für die Behandlung der Biegung einer Fläche von besonderem Vorteile. Dasselbe gilt für das allgemeine Problem, alle Flächen zu finden, deren Linienelement ds in der Form

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,v + g\,dv^2 = 2F\,d\alpha\,d\beta$$

gegeben ist. Führt man durch Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung die Parameter α, β der Minimalkurven ein, so läßt sich das Problem auf eine Reihe von Quadraturen zurückführen. Die Hilfsmittel dazu sind in meiner früheren Abhandlung gegeben; die damaligen Gleichungen in anderer Zusammenstellung und Reihenfolge benutzt, führen bei passender Wahl der willkürlichen Funktion zum Ziele.

Ist eine Lösung schon bekannt, so ergeben sich wieder (vgl. unten Nr. 10 ff.) die Gleichungen meiner früheren Abhandlung; es werden aber einige Berichtigungen der früheren Resultate nötig (vgl. unten Nr. 11).

1. Sind α, β die Parameter der Minimalkurven auf der Fläche, so lassen sich die Koordinaten x, y, z eines Punktes dieser Fläche in folgender Form darstellen:

---

[1]) Vgl. meine Arbeit: „Die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche", Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. 39, 1921; im folgenden kurz zitiert als „Abhandlung". Es wird jetzt 2ω für $\lambda - \mu$ geschrieben, so daß ω an Stelle des Zeichens ω' der Abhandlung steht.

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x &= i\int\left[\cos\lambda\cdot\frac{\partial W}{\partial\alpha}\,d\alpha-\cos\mu\cdot\frac{\partial W}{\partial\beta}\,d\beta\right],\\
y &= i\int\left[\sin\lambda\cdot\frac{\partial W}{\partial\alpha}\,d\alpha-\sin\mu\cdot\frac{\partial W}{\partial\beta}\,d\beta\right],\\
z &= \int(W_\alpha\,d\alpha+W_\beta\,d\beta)=W,
\end{aligned}
$$

wo zwischen λ, μ, W die folgenden Gleichungen bestehen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}\operatorname{tg}\omega &= \frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = 2\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha},\\
\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\operatorname{tg}\omega &= -\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = -2\frac{\partial\omega}{\partial\beta}+\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta},
\end{aligned}
$$

$$
(3)\qquad \lambda-\mu=2\,\omega;
$$

μ ist zu λ konjugiert imaginär, also ω rein imaginär. Die vier Gleichungen (2) reduzieren sich durch (3) auf zwei Gleichungen (für λ_β und μ_α), und von diesen ist wieder die eine Folge der andern, da sie durch Vertauschung von i mit $-i$ aus einander hervorgehen. Infolge dieser Gleichungen sind dx und dy totale Differentiale. Aus (2) folgt ferner:

$$
(4)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\alpha}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{cotg}\omega\cdot\frac{\partial\lg W_\beta}{\partial\alpha}\right)=2\,\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}.
$$

Das Gaußsche Krümmungsmaß der Fläche (1) ist

$$
(5)\qquad -\frac{1}{F}\frac{\partial^2\lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta}=-\frac{\lambda_\alpha\mu_\beta-\lambda_\beta\mu_\alpha}{2\,F\cdot\cos^2\omega},\ ^{1})
$$

und die Fundamentalgröße F:

$$
(6)\qquad F=2\cos^2\omega\cdot W_\alpha W_\beta,
$$

so daß das Linienelement ds durch die Gleichung

$$
(6\,a)\qquad ds^2=2\,F\,d\alpha\,d\beta
$$

gegeben wird; hierbei sind (wie auch im folgenden) die Differentiationen durch Indices angedeutet. Durch Elimination von ω aus den Gleichungen (2) ergibt sich die zwischen F und W bestehende (schon von Bour aufgestellte) Gleichung:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&W_{\alpha\alpha}W_{\beta\beta}-W_{\alpha\beta}^2+W_\alpha W_\beta F'_\alpha F'_\beta-W_{\alpha\alpha}F'_\beta-W_{\beta\beta}W_\alpha F'_\alpha\\
&\qquad=(F-2\,W_\alpha W_\beta)F'_{\alpha\beta},\ \text{wo } F'=\log F.
\end{aligned}
$$

[1]) In Gleichung (28) der Abhandlung fehlt der Nenner 2 auf der rechten Seite.

Sie wird von den drei Koordinaten x, y, z der Gleichungen (1) befriedigt und ist ein besonderer Fall einer allgemeinen von Darboux und Enneper aufgestellten Gleichung, die von den drei Fundamentalgrößen E, F, G bei allgemeinen Flächenparametern abhängt, und die ich a. a. O. nach den Vorlesungen Ennepers elementar abgeleitet habe, während Darboux zur Ableitung die Theorie der Differentialparameter benutzten.

2. Uns beschäftigen zunächst die Gleichungen (5) und (6). Erstere kann wegen (3) in der Form

$$\frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\lambda_\beta\omega_\alpha - \lambda_\alpha\omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2\omega} \tag{8}$$

geschrieben werden, oder in der Form:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\lambda_\beta \operatorname{tg}\omega - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\lambda_\alpha \operatorname{tg}\omega + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\alpha}\right); \tag{9}$$

man kann daher setzen:

$$\lambda_\beta \operatorname{tg}\omega - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\beta} = \frac{\partial \lg \Omega}{\partial\beta}, \quad \lambda_\alpha \operatorname{tg}\omega + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\alpha} = \frac{\partial \lg \Omega}{\partial\alpha}. \tag{10}$$

Zufolge (6) ist aber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lg F}{\partial\beta} &= -2\,\omega_\beta \operatorname{tg}\omega + \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial\beta}, \\ \frac{\partial \lg F}{\partial\alpha} &= -2\,\omega_\alpha \operatorname{tg}\omega + \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial\alpha}, \end{aligned} \tag{11}$$

also auch:

$$\begin{aligned} (\lambda_\beta + \omega_\beta)\operatorname{tg}\omega &= \frac{\partial \lg \Omega}{\partial\beta} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial\beta}, \\ (\lambda_\alpha - \omega_\alpha)\operatorname{tg}\omega &= \frac{\partial \lg \Omega}{\partial\alpha} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial\alpha}. \end{aligned} \tag{12}$$

Besteht also zwischen λ und ω die Gleichung (8) und ist die Gleichung (6) erfüllt, so gibt es eine Funktion Ω, die gleichzeitig je den beiden Gleichungen (10) oder (12) genügt.

Vertauscht man i mit $-i$ und geht dabei Ω in Ω' (α in β, λ in μ, ω in $-\omega$) über, so ergibt sich ferner:

$$\mu_\alpha \operatorname{tg}\omega + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\alpha} = -\frac{\partial \lg \Omega'}{\partial\alpha}, \quad \mu_\beta \operatorname{tg}\omega - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg F}{\partial\beta} = -\frac{\partial \lg \Omega'}{\partial\beta}, \tag{13}$$

$$(14)\qquad \begin{aligned}(\mu_\alpha - \omega_\alpha)\operatorname{tg}\omega &= -\frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \alpha} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha},\\ (\mu_\beta + \omega_\beta)\operatorname{tg}\omega &= -\frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \beta} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \beta}.\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (10) und (13) folgt

$$(15)\quad (\lambda_\beta - \mu_\beta)\operatorname{tg}\omega = \frac{\partial \lg \Omega\Omega'}{\partial \beta},\quad (\lambda_\alpha - \mu_\alpha)\operatorname{tg}\omega = \frac{\partial \lg \Omega\Omega'}{\partial \alpha},$$

und diese Gleichungen werden mit (11) identisch, wenn man setzt:

$$(16)\quad \lg \Omega\Omega' = \lg W_\alpha W_\beta - \lg F,\quad \Omega\Omega' = \frac{W_\alpha W_\beta}{F} = \frac{1}{2\operatorname{cosin}^2\omega}.$$

Um diese Gleichung (16) zu befriedigen und gleichzeitig die Gleichungen (10) und (13) mit den Gleichungen (2) in Übersetzung zu bringen, hat man zu setzen:

$$(17)\qquad \Omega = \frac{W_\alpha}{\sqrt{F}},\quad \Omega' = \frac{W_\beta}{\sqrt{F}}.$$

Aus der ersten Gleichung (12) und der zweiten Gleichung (14) erhält man unter Benutzung von (16) und (11)

$$(\lambda_\beta - \mu_\beta - 2\,\omega_\beta)\operatorname{tg}\omega = \frac{\partial \lg \Omega\Omega'}{\partial \beta} + \frac{\partial \lg F}{\partial \beta} - \frac{\partial \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \beta} = 0,$$

ebenso, wenn man nach α differenziert; folglich:

$$(18)\qquad \lambda - \mu = 2\,\omega, \text{ wie in (3).}$$

Da μ zu λ konjugiert sein sollte, folgt hieraus, daß λ und μ den gemeinsamen imaginären Teil ω haben. Ist umgekehrt (18) erfüllt, so ergibt sich aus (15) wieder die Gleichung (16), nämlich $2\cos^2\omega\,\Omega\Omega' = 1$.

Bestehen also die Gleichungen (8) und (6) und wird Ω gemäß (17) bestimmt, so bestehen auch die Gleichungen (2) und (3), und als Folge derselben ist auch (4) erfüllt.

3. Berechnet man $\lambda_{\alpha\beta}$ aus den Gleichungen (10), so ergibt sich unter Berücksichtigung von (17), wenn $F' = \lg F$:

$$(19)\qquad \begin{aligned}\lambda_{\alpha\beta} &= \left(\frac{\partial^2 \lg \Omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \tfrac{1}{2}F'_{\alpha\beta}\right)\operatorname{cotg}\omega - \frac{\omega_\alpha}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial \lg \Omega}{\partial \beta} + \tfrac{1}{2}F'_\beta\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 \lg \Omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \tfrac{1}{2}F'_{\alpha\beta}\right)\operatorname{cotg}\omega - \frac{\omega_\beta}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial \lg \Omega}{\partial \alpha} - \tfrac{1}{2}F'_\alpha\right),\ \text{also:}\end{aligned}$$

$$\operatorname{cotg}\omega\cdot F'_{\alpha\beta}-\frac{1}{2\sin^2\omega}(\omega_\alpha F'_\beta+\omega_\beta F'_\alpha)=\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\omega_\alpha\frac{\partial\lg\Omega}{\partial\beta}-\omega_\beta\frac{\partial\lg\Omega}{\partial\alpha}\right).$$

Es ist dies eine partielle Gleichung erster Ordnung für Ω, wenn F und ω gegeben sind; sie ersetzt die Gleichung (8), da man λ aus Ω berechnen kann. Durch Vertauschung von i mit $-i$ ergibt sich eine entsprechende Gleichung für Ω', nämlich:

$$(20)\qquad F'_{\alpha\beta}\sin\omega\cdot\cos\omega-\tfrac{1}{2}(F'_\alpha\omega_\beta+F'_\beta\omega_\alpha)=\omega_\beta\frac{\partial\lg\Omega'}{\partial\alpha}-\omega_\alpha\frac{\partial\lg\Omega'}{\partial\beta}.$$

4. Sind F und ω gegeben und ist λ eine Lösung von (8), so ist die allgemeine Lösung durch $\lambda+\varphi(\omega)$ gegeben, wenn φ eine willkürliche Funktion bezeichnet. Zu jeder Lösung $\lambda+\varphi(\omega)$ gehört ein Wert $\lg\Omega+\chi(\omega)$, und aus (10) ergibt sich:

$$(21)\qquad \varphi'(\omega)\operatorname{tg}\omega=\chi'(\omega).$$

Da der imaginäre Teil von λ gleich ω sein soll, so muß φ stets eine reelle Funktion von ω bezeichnen; es sei $\omega=iq$, und

$$\varphi(\omega)=\psi(q),\qquad \chi(\omega)=f(q)+if_1(q),$$
$$\varphi'(\omega)=-\psi'(q)\cdot i,\quad \chi'(\omega)=-if'(q)+f'_1(q).$$

Ändert sich $\lg\Omega$ additiv um $\chi(\omega)$, so verwandelt sich $\lg\Omega'$ in $\lg\Omega'+f(q)-if_1(q)$ und es wird nach (13):

$$-i\psi'(q)\operatorname{tg}\omega=(-f'(q)+if'_1(q))(-i)=f'_1(q)+if'(q),$$

dagegen nach (21):

$$-i\psi'(q)\operatorname{tg}\omega=(f'(q)+if'_1(q))(-i)=f'_1(q)-if'(q),$$

folglich $f'(q)=0$. Nun ist nach (16) $\lg\Omega+\lg\Omega'$ eine fest gegebene Funktion von ω, es muß also $f(q)+if_1(q)+f(q)-if_1(q)=2f(q)=0$ sein.

Zu einem gegebenen Werte von ω gehören so unendlich viele von einer willkürlichen Funktion $\psi(q)$ abhängige Werte von λ.

Ist aber λ gegeben, so gehören zu jedem λ unendlich viele Werte von ω, die von einer willkürlichen Funktion $f(p)$ abhängen, wenn $\lambda=p+\omega$ gesetzt wird. Wächst $\operatorname{tg}\omega$ um $f(p)$, so wächst $\lg\Omega$ um $g(p)$, $\lg\Omega'$ um $g_1(p)$, wobei zufolge (10) und (13):

$$(22)\qquad f(p)=g'(p),\quad f_1(p)=-g'_1(p),$$

wenn f_1 zu f, g_1 zu g konjugiert ist, und nach (16):

$$g(p) + g_1(p) = 0,$$

woraus folgt, daß $g(p)$ rein imaginär sein muß; ebenso ist dann $f(p)$ rein imaginär.

5. Wie zwischen W und ω und zwischen W und F, so muß auch zwischen F und ω eine Relation bestehen. Die Aufstellung derselben scheint umständlich zu sein; statt dessen kann man Relationen zwischen F und einer Hilfsgröße δ aufstellen.

Die Gleichungen (17) sind nur möglich, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial \Omega \sqrt{F}}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega' \sqrt{F}}{\partial \alpha} = W_{\alpha\beta} \tag{23}$$

erfüllt ist; andererseits folgt aus (2)

$$W_{\alpha\beta} = W_\alpha \lambda_\beta \operatorname{tg} \omega, \text{ also auch:}$$

$$W_\alpha \lambda_\beta + W_\beta \mu_\alpha = 0, \text{ also auch: } \Omega \lambda_\beta + \Omega' \mu_\alpha = 0. \tag{24}$$

Die Bedingungen (29) und (29 a) sagen also wesentlich dasselbe aus, nämlich, daß die Gleichungen (2) eine gemeinsame reelle Lösung W zulassen. In der Tat erhält man aus (10) und (13):

$$(\Omega \lambda_\beta + \Omega' \mu_\alpha) \operatorname{tg} \omega = \tfrac{1}{2} F_\beta \Omega + \Omega_\beta - \tfrac{1}{2} F'_\alpha \Omega' - \Omega'_\alpha, \tag{24a}$$

und der Ausdruck rechts verschwindet wegen (23).

Da der absolute Betrag von Ω durch (16) gegeben ist, kann man setzen

$$\Omega = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2 \operatorname{cosin} \omega}}, \quad \Omega' = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{2 \operatorname{cosin} \omega}}, \tag{25}$$

wo δ reell ist. Wegen (10) und (13) wird dann die Gleichung (23):

$$e^{i\delta}(\tfrac{1}{2} F'_\beta + i\,\delta_\beta + \operatorname{tg} \omega \cdot \omega_\beta) + e^{-i\delta}(i\,\delta_\alpha - \tfrac{1}{2} F'_\alpha - \operatorname{tg} \omega \cdot \omega_\alpha) = 0. \tag{26}$$

Es genügt δ der Gleichung, welche aus (19) oder (20) vermöge (25) entsteht, nämlich:

$$F'_{\alpha\beta} \sin \omega \cdot \operatorname{cosin} \omega = \tfrac{1}{2}(F'_\alpha \omega_\beta + F'_\beta \omega_\alpha) + i\,(\omega_\alpha \delta_\beta - \omega_\beta \delta_\alpha). \tag{27}$$

Sei zur Abkürzung

$$M = \tfrac{1}{2} F'_\beta + i\,\delta_\beta, \quad N = \tfrac{1}{2} F'_\alpha - i\,\delta_\alpha, \quad L = \log \operatorname{cosin} \omega, \tag{28}$$

so erhalten wir aus (26) und (27):

$$\begin{aligned} L_\beta e^{i\delta} - L_\alpha e^{-i\delta} &= e^{i\delta} M - e^{-i\delta} N, \\ L_\beta N + L_\alpha M &= - F'_{\alpha\beta} \sin^2 \omega, \end{aligned} \tag{29}$$

und hieraus durch Auflösung:

$$(30)\quad \begin{aligned} L_\alpha(Me^{i\delta}+Ne^{-i\delta}) &= -F'_{\alpha\beta}e^{i\delta}\sin^2\omega - N(Me^{i\delta}-Ne^{-i\delta}),\\ L_\beta(Me^{i\delta}+Ne^{-i\delta}) &= -F'_{\alpha\beta}e^{-i\delta}\sin^2\omega + M(Me^{i\delta}-Ne^{-i\delta}). \end{aligned}$$

Die Elimination von L durch Aufstellung der Integrabilitäts-Bedingung führt zu dem Resultate:

$$(31)\quad \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{-F'_{\alpha\beta}e^{i\delta}\sin^2\omega - N(Me^{i\delta}-Ne^{-i\delta})}{Me^{i\delta}+Ne^{-i\delta}}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{-F'_{\alpha\beta}e^{-i\delta}\sin^2\omega + M(Me^{i\delta}-Ne^{-i\delta})}{Me^{i\delta}+Ne^{-i\delta}}\right).$$

Führt man die Differentiationen aus, so wird dies eine lineare Gleichung zwischen $S=\sin^2\omega$, S_α und S_β; eine ebensolche Gleichung entsteht aus (27), wenn man die linke Seite mit $\cos^2\omega = 1-S$ multipliziert. Fügt man in (27) auf beiden Seiten den Faktor $\sin\omega\cos\omega$ hinzu, so entsteht eine lineare Gleichung für $S(1-S)$, S_α und S_β. Aus diesen drei Gleichungen kann man S, S_α, S_β berechnen; stellt man dann durch doppelte Berechnung von $S_{\alpha\beta}$ die Integrabilitäts-Bedingung auf, so entsteht die gesuchte, nur von F abhängige Differentialgleichung für δ.

Partikuläre Lösungen derselben kann man immer angeben. Die beiden Gleichungen (29) nämlich werden miteinander identisch, wenn

$$(31\,a)\quad \begin{aligned} e^{i\delta} &= \varrho L_\alpha, \qquad e^{-i\delta} = -\varrho L_\beta,\\ L_\beta e^{i\delta} - L_\alpha e^{-i\delta} &= -\varrho F'_{\alpha\beta}\sin^2\omega, \end{aligned}$$

oder:

$$(31\,b)\quad \begin{aligned} L_\beta e^{i\delta} + L_\alpha e^{-i\delta} &= 0, \qquad F'_{\alpha\beta}\sin^2\omega = -2L_\alpha L_\beta,\\ \varrho^2 L_\alpha L_\beta &= -1. \end{aligned}$$

Nun ist nach (25) und (17)

$$e^{i\delta}\sqrt{F} = W_\alpha\cos\omega\cdot\sqrt{2}, \qquad e^{-i\delta}\sqrt{F} = W_\beta\cos\omega\cdot\sqrt{2},\ \text{also:}$$

$$\begin{aligned} (L_\beta e^{i\delta} + L_\alpha e^{-i\delta})\sqrt{F} &= \sqrt{2}\cdot\cos\omega\cdot(L_\beta W_\alpha + L_\alpha W_\beta)\\ &= -\sqrt{2}\cos\omega\cdot(\omega_\beta W_\alpha + \omega_\alpha W_\beta)\operatorname{tg}\omega, \end{aligned}$$

und wegen (2):

$$(32)\quad (L_\beta e^{i\delta} + L_\alpha e^{-i\delta})\lambda_\beta\mu_\alpha\sqrt{F} = -\sqrt{2}\cos\omega\,(\omega_\beta\mu_\alpha - \omega_\alpha\lambda_\beta)W_{\alpha\beta}.$$

Aus der ersten Gleichung (31 b) folgt also das Verschwinden von $\omega_\beta\mu_\alpha - \omega_\alpha\lambda_\beta$, und damit geht die Gleichung (8) über in

$$F'_{\alpha\beta}\cos^2\omega = -2\,\omega_\alpha\,\omega_\beta, \tag{33}$$

d. h. in die zweite Gleichung (31 b). Besteht also eine der beiden ersten Gleichungen (31 b), so gilt auch die andere, und es sind dann die beiden Gleichungen (29) erfüllt, sobald eine erfüllt ist.

Setzen wir das Bestehen der Gleichung (33) voraus, so folgt aus (8) nach obigen Entwicklungen die Gleichung $\omega_\beta\mu_\alpha - \omega_\alpha\lambda_\beta = 0$; und hieraus gemäß (32) die erste Gleichung (31 b), andererseits vermöge (10) und (13):

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2}(\omega_\alpha F'_\beta + \omega_\beta F'_\alpha) + \frac{\partial \lg \Omega}{\partial \beta}\,\omega_\alpha + \frac{\partial \lg \Omega'}{\partial \alpha}\,\omega_\beta \\ &= \tfrac{1}{2}(\omega_\alpha F'_\beta + \omega_\beta F'_\alpha) + i(\omega_\alpha\delta_\beta - \omega_\beta\delta_\alpha) + 2\,\omega_\alpha\omega_\beta \operatorname{tg}\omega; \end{aligned}$$

das ist aber wegen (33) wieder die Gleichung (27), die mit der zweiten Gleichung (29) identisch ist. Genügt also ω der Gleichung (33), so sind auch die beiden Gleichungen (29) erfüllt.

Definiert man eine Größe $\mathfrak{w}$ durch die Gleichung $\cos\omega \cdot d\mathfrak{w} = d\omega$, so geht (33) über in

$$F'_{\alpha\beta} + 2\,\mathfrak{w}_\alpha\,\mathfrak{w}_\beta = 0,$$

deren Charakteristiken sind ($F^* = F'_{\alpha\beta}$), $q = \mathfrak{w}_\beta$, $p = \mathfrak{w}_\alpha$):

$$\frac{d\alpha}{2q} = \frac{d\beta}{2p} = \frac{-d\mathfrak{w}}{2F^*} = \frac{-dp}{F^*_\alpha} = \frac{-dq}{F^*_\beta}. \tag{34}$$

Ist ω gefunden, so muß δ den beiden Gleichungen (29) genügen, und somit auch der ersten Gleichung (31 b). Die Integration von (32) läßt eine willkürliche Funktion in die Lösung eingehen; δ ist dann vollkommen bestimmt. Aus (25) findet man dann Ω und Ω'; aus (17) wird W bestimmt und aus (10) bzw. (13) λ und μ.

Durch Integration der partiellen Gleichung erster Ordnung (33) erhält man also eine Klasse von Flächen mit gegebenem Linienelemente, die von einer willkürlichen Funktion abhängen (also noch nicht alle gesuchten Flächen).

Die Gleichungen (29) reduzieren sich auch aufeinander, wenn die Bedingungen

$e^{i\delta} = \varrho N,\ e^{-i\delta} = -\varrho M,\ e^{i\delta} M - e^{-i\delta} N = -\varrho F'_{\alpha\beta} \sin^2\omega$, oder:

(35) $\qquad M e^{i\delta} + N e^{-i\delta} = 0, \quad F'_{\alpha\beta} \sin^2\omega = -2MN$

erfüllt sind; aber dann ergibt sich mittels obiger Umformungen: $MW_\alpha + NW_\beta = 0$ und hieraus unter Benutzung von (24a), (10) und (12): $2\lambda_\beta \mu_\alpha - \omega_\beta \mu_\alpha + \omega_\alpha \lambda_\beta = 0$; ferner aus (8):

$$F'_{\alpha\beta} \operatorname{cosin}^2\omega = -2(\lambda_\beta \mu_\alpha + \omega_\alpha \omega_\beta),$$

und es wird

$$MN = -(\lambda_\beta - \omega_\beta)(\mu_\alpha + \omega_\alpha) \operatorname{tg}^2\omega = (\lambda_\beta \mu_\alpha + \omega_\alpha \omega_\beta) \operatorname{tg}^2\omega,$$

so daß die zweite Gleichung (35) erfüllt ist. Die erste Gleichung (35) liefert eine partielle Gleichung erster Ordnung für δ, nämlich:

(36) $\qquad (\tfrac{1}{2} F'_\beta + i\delta_\beta) e^{i\delta} + (\tfrac{1}{2} F'_\alpha - i\delta_\alpha) e^{-i\delta} = 0.$

Ist δ gefunden, so ergibt sich ω aus der zweiten Gleichung (35); es hängt also δ von einer willkürlichen Funktion ab, ω ist dann aber vollkommen bestimmt. Man findet auf diese Weise eine zweite Klasse von Flächen, die das Problem lösen, und zwar durch eine lineare partielle Gleichung für δ, während die obige Gleichung (33) für ω nicht linear war.

6. Daß die Gleichung(7) infolge der aufgestellten Bedingungen tatsächlich erfüllt ist, läßt sich direkt in folgender Weise erkennen. Die Gleichung (7) schreiben wir in der Form:

$$\frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} \cdot \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} - \frac{W^2_{\alpha\beta}}{W_\alpha W_\beta} - \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} \cdot \frac{F_\beta}{F} - \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} \cdot \frac{F_\alpha}{F} + \frac{F_\alpha F_\beta}{F^2}$$

(37) $$= \left(\frac{F}{W_\alpha W_\beta} - 2\right) \frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -2\sin^2\omega \cdot \frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

Aus (6), (2) und (3) folgt:

$$\frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} = -\frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} + 2\omega_\alpha \operatorname{tg}\omega + F'_\alpha, \quad \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} = -\frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} + 2\omega_\beta \operatorname{tg}\omega + F'_\beta$$

$$= \lambda_\alpha \operatorname{tg}\omega + F'_\alpha \qquad\qquad = F'_\beta - \mu_\beta \operatorname{tg}\omega.$$

Sei $t = \operatorname{tg}\omega$, so wird also die linke Seite von (37):

$$(F'_\alpha + \lambda_\alpha t)(F'_\beta - \mu_\beta t) - (F'_\alpha + \lambda_\alpha t) F'_\beta - (F'_\beta - \mu_\alpha t) F'_\alpha + F'_\alpha F'_\beta - \frac{W^2_{\alpha\beta}}{W_\alpha W_\beta}$$

$$= -\lambda_\alpha \mu_\beta t^2 - \frac{W^2_{\alpha\beta}}{W_\alpha W_\beta} = (\lambda_\beta \mu_\alpha - \lambda_\alpha \mu_\beta) \operatorname{tg}^2\omega;$$

wegen (5) stimmen folglich die beiden Seiten der Gleichung (33) in der Tat überein.

7. Da das allgemeine Problem, alle Flächen mit gegebenem Linienelemente (6a) aufzustellen, auf eine partielle Gleichung zweiter Ordnung zurückführt, so gilt dasselbe, wenn eine dieser Flächen als gegeben betrachtet wird, d. h. wenn alle Biegungsflächen einer gegebenen gesucht werden; es ergeben sich indessen wesentliche Vereinfachungen Die Lösung dieser Aufgabe habe ich in der „Abhandlung“ in einer besonderen Form erhalten, die sich hier in folgender Weise ergibt.

Es mögen die Buchstaben

$\lambda, \mu, \omega, F, \alpha, \beta, x, y, z\,(=W)$ für die gegebene Fläche und bzw.
$\Phi, \Psi, \mathfrak{W}, F, \alpha, \beta, \xi, \eta, \zeta$ „ „ gesuchte „

die bisherige Bedeutung haben. Dann ist nach (8):

$$(38)\qquad \frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\lambda_\beta \omega_\alpha - \lambda_\alpha \omega_\beta}{\operatorname{cosin}^2 \omega} = \frac{\Phi_\beta \mathfrak{W}_\alpha - \Phi_\alpha \mathfrak{W}_\beta}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}}.$$

Diese Gleichung läßt sich in folgender Form schreiben:

$$(39)\qquad \frac{\partial}{\partial\beta}(\lambda_\alpha \operatorname{tg}\omega - \Phi_\alpha \operatorname{tg}\mathfrak{W}) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(\lambda_\beta \operatorname{tg}\omega - \Phi_\beta \operatorname{tg}\mathfrak{W});$$

es gibt also eine Funktion R, die den Gleichungen genügt

$$(40)\qquad \Phi_\alpha \operatorname{tg}\mathfrak{W} = \lambda_\alpha \operatorname{tg}\omega + \frac{\partial \lg R}{\partial\alpha},\quad \Phi_\beta \operatorname{tg}\mathfrak{W} = \lambda_\beta \operatorname{tg}\omega + \frac{\partial \lg R}{\partial\beta};$$

und durch Vertauschung von i mit $-i$, wenn R' zu R konjugiert ist:[1])

$$(40a)\qquad \Psi_\beta \operatorname{tg}\mathfrak{W} = \mu_\beta \operatorname{tg}\omega - \frac{\partial \lg R'}{\partial\beta},\quad \Psi_\alpha \operatorname{tg}\mathfrak{W} = \mu_\alpha \operatorname{tg}\omega - \frac{\partial \lg R'}{\partial\alpha}.$$

Andererseits müssen analog zu (2) die Gleichungen

$$(41)\qquad \Phi_\beta \operatorname{tg}\mathfrak{W} = \frac{\partial \lg \zeta_\alpha}{\partial\beta},\quad \Psi_\alpha \operatorname{tg}\mathfrak{W} = -\frac{\partial \lg \zeta_\beta}{\partial\alpha}$$

bestehen; und benutzt man die Gleichungen (2) auch zur Umformung der rechten Seite von (40) und (40a), so ergibt sich:

$$(42)\qquad \zeta_\alpha = i R W_\alpha,\quad \zeta_\beta = -i R' W_\beta,$$

[1]) Die Gleichungen (40) und (40a) sind die Gleichungen (79) der Abhandlung.

wobei rechts zunächst ein willkürlicher konstanter Faktor stehen kann; derselbe ist gleich i gewählt, um Übereinstimmung mit der Bezeichnung in der Abhandlung herzustellen. Die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Biegungsfläche werden

$$\begin{aligned} \xi &= \int [\cos\Phi \cdot R\, W_\alpha\, d\alpha + \cos\Psi \cdot R'\, W_\beta\, d\beta], \\ \eta &= \int [\sin\Phi \cdot R\, W_\alpha\, d\alpha + \sin\Psi \cdot R'\, W_\beta\, d\beta], \\ \zeta &= i \int [R\, W_\alpha\, d\alpha - R'\, W_\beta\, d\beta], \end{aligned} \tag{43}$$

in Übereinstimmung mit den Gleichungen (83) der Abhandlung.

Damit in (43) unter den Integralzeichen vollständige Differentiale stehen, muß außer den Gleichungen (40) noch die Bedingung

$$\frac{\partial R\, W_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial R'\, W_\beta}{\partial \alpha} = 0 \tag{44}$$

erfüllt sein. Analog zu (24) muß auch die Gleichung

$$\Phi_\beta R\, W_\alpha - \Psi_\alpha R'\, W_\beta = 0 \tag{45}$$

bestehen. Es ist in der Tat:

$$\frac{\partial R\, W_\alpha}{\partial \beta} + \frac{\partial R'\, W_\beta}{\partial \alpha} = \operatorname{tg}\mathfrak{W}\,(\Phi_\beta R\, W_\alpha - \Psi_\alpha R'\, W_\beta). \tag{46}$$

Es ist ferner

$$F = 2\,\zeta_\alpha \zeta_\beta \cos^2\mathfrak{W} = 2\, W_\alpha W_\beta \cos^2\omega, \tag{47}$$

oder

$$R R' \cos^2\mathfrak{W} = \cos^2\omega.$$

8. Hat Δ für die gesuchte Fläche dieselbe Bedeutung wie δ für die gegebene Fläche, so ist, wenn man noch die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} &2P = \Phi + \Psi,\quad 2p = \lambda + \mu,\quad t = \operatorname{tg}\omega,\quad T = \operatorname{tg}\mathfrak{W}, \\ &R = re^{i\varphi},\quad R' = re^{-i\varphi},\quad Q = \log T,\quad q = \log t \end{aligned} \tag{48}$$

zur Abkürzung einführt, unter Benutzung von (10), (40), (40 a) und (25):

$$\begin{aligned} P_\beta T &= \tfrac{1}{2} F'_\beta + i\,\Delta_\beta = p_\beta t + i\,\varphi_\beta = \tfrac{1}{2} F'_\beta + i\,\delta_\beta + i\,\varphi_\beta, \\ P_\alpha T &= -\tfrac{1}{2} F'_\alpha + i\,\Delta_\alpha = p_\alpha t + i\,\varphi_\alpha = -\tfrac{1}{2} F'_\alpha + i\,\delta_\alpha + i\,\varphi_\alpha, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\Delta = \delta + \varphi. \tag{49 a}$$

Die Größe Δ hat der Differentialgleichung zu genügen, die sich aus (31) nach Obigem ableiten läßt. In diesem Falle aber

kann Δ durch zwei sukzessive Gleichungen erster Ordnung gefunden werden. Nach (27) bestehen für δ und Δ die Gleichungen:

$$(50)\quad F'_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}[F, q] + i(q, \delta), \quad F'_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}[F', Q] + i(Q, \Delta),$$

wenn zur Abkürzung:

$$(50\,a)\quad \begin{aligned} [\psi, \chi] &= [\chi, \psi] = \psi_\alpha \chi_\beta + \psi_\beta \chi_\alpha, \\ (\psi, \chi) &= \psi_\alpha \chi_\beta - \psi_\beta \chi_\alpha = -(\chi, \psi). \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichungen (50) erscheint dann in der Form:

$$(51)\quad F'_{\alpha\beta} = (T, P) = (t, p) = (Q, P)\,T = (q, p)\,t,$$

und die zweite Gleichung (50) wird wegen (49 a):

$$(51\,a)\quad F'_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}[F, Q] + i(Q, \delta) + i(Q, \varphi);$$

und in dieser Form ergibt sie sich direkt aus (49) vermöge (51).

Aus (49) und (51) erhält man auch:

$$(51\,b)\quad (Q, P)\,T = F'_{\alpha\beta} = (Q, p)\,t + i(Q, \varphi),$$

und ebenso

$$(51\,c)\quad (q, P)\,T = (q, p)\,t + i(q, \varphi) = F'_{\alpha\beta} + i(q, \varphi).$$

Eliminiert man (Q, φ) aus den Gleichungen (51 a) und (51 b), so ergibt sich eine Identität. Die Gleichungen (40 a) und (40 b) sind eine Folge der Gleichung (38), vorausgesetzt, daß R einer gewissen Bedingung genügt, die sich ebenso ergibt, wie die Bedingung (19) oder (20) für Ω bzw. Ω'; diese Bedingung ist durch die Gleichung (51 a) gegeben, welche wegen (49) durch (51 b) oder (51 c) ersetzt werden kann.

Die Gleichung (47) wird wegen der in (48) eingeführten Bezeichnung

$$(52)\quad r^2 \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = \operatorname{cosin}^2 \omega.$$

Die zu (18) analoge Gleichung ist eine Folge von (40) und (40 a), aus denen man durch Subtraktion erhält:

$$(\Phi_\alpha - \Psi_\alpha)\,T = (\lambda_\alpha - \mu_\alpha)\,t + 2r'_\alpha, \quad (\Phi_\beta - \Psi_\beta)\,T = (\lambda_\beta - \mu_\beta)\,t + 2r'_\beta,$$

wo $r' = \lg r$.

Aus (52) erhält man weiter:

$$(52\,a)\quad r'_\alpha = \mathfrak{W}_\alpha\,T - \omega_\alpha\,t, \qquad r'_\beta = \mathfrak{W}_\beta\,T - \omega_\beta\,t.$$

Es wird also in der Tat

(53) $\Phi_\alpha - \Psi_\alpha = 2\,\mathfrak{W}_\alpha,\ \Phi_\beta - \Psi_\beta = 2\,\mathfrak{W}_\beta,\ \Phi - \Psi = 2\,\mathfrak{W}.$

Die Gleichung (44) wird:

(53a) $W_{\alpha\beta}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + W_\alpha e^{i\varphi}(r'_\beta + i\varphi_\beta) + W_\beta e^{-i\varphi}(r'_\alpha - i\varphi_\alpha) = 0.$

9. Die letztere Gleichung ist mit (51b) identisch, wenn:

(53b) $$W_\alpha e^{i\varphi} = \varrho\, Q_\alpha,\quad W_\beta e^{-i\varphi} = \varrho\, Q_\beta,$$

$$2\cos\varphi \cdot W_{\alpha\beta} + W_\alpha e^{i\varphi} r'_\beta + W_\beta e^{-i\varphi} r'_\alpha = \varrho\,\{(Q,p)\,t - F'_{\alpha\beta}\},$$

also auch:

$$W_{\alpha\beta}(W_\beta Q_\alpha + W_\alpha Q_\beta) + W_\alpha W_\beta (Q_\alpha r'_\beta + Q_\beta r'_\alpha) = W_\alpha W_\beta \{(Q,p)\,t - F'_{\alpha\beta}\};$$

hierin ist nach (52a), (2) und (48):

$$Q_\alpha r'_\beta + Q'_\beta r'_\alpha = [Q, \mathfrak{W}]\,T - [Q,\omega]\,t = \frac{2\,\mathfrak{W}_\alpha \mathfrak{W}_\beta}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}} - [Q,\omega]\,t,$$

$$W_{\alpha\beta}[W,Q] = W_\alpha W_\beta\, t\,(Q_\alpha \lambda_\beta - Q_\beta \mu_\alpha) = W_\alpha W_\beta\, t\,\{(Q,p) + [Q,\omega]\}.$$

Setzt man dies ein, so ergibt sich:

$$F'_{\alpha\beta}\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W} = -\,2\,\mathfrak{W}_\alpha \mathfrak{W}_\beta.$$

Das ist aber die Gleichung (33). Durch den Ansatz (53b) findet man also dieselbe besondere Klasse von Biegungsflächen, die wir im Anschlusse an (33) aufgestellt hatten. Sie hängen nur von der Größe F ab, nicht von den Größen W, λ, μ, ω.

Die Gleichung (53a) wird auch mit (51c) identisch, wenn die Relationen

(54) $\varrho\, q_\alpha = W_\alpha e^{i\varphi},\ \varrho\, q_\beta = W_\beta e^{-i\varphi}$, also $W_\alpha q_\beta e^{i\varphi} - W_\beta q_\alpha e^{-i\varphi} = 0.$

(54a) $\varrho\,\{F_{\alpha\beta} - (q,P)\,T\} = W_{\alpha\beta}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + W_\alpha r'_\beta e^{i\varphi} + W_\beta r'_\alpha e^{-i\varphi}$

erfüllt sind; die letzte Gleichung wird, wenn man ϱ eliminiert:

(54b) $\{F'_{\alpha\beta} - (q,P)\,T\}\,W_\alpha W_\beta = W_{\alpha\beta}[W,q] + W_\alpha W_\beta [r',q],$

und wenn man W mittels (2) eliminiert:

$$\{F'_{\alpha\beta} - (q,P)\,T\} = (q_\alpha \lambda_\beta - q_\beta \mu_\alpha)\,t + [r',q] = F'_{\alpha\beta} + \frac{2\,\omega_\alpha \omega_\beta}{\cos^2 \omega} + [r',q],$$

also schließlich unter Benutzung von (51c):

(54c) $$F'_{\alpha\beta} + \frac{2\,\omega_\alpha \omega_\beta}{\cos^2 \omega} + [r',q] + i\,(q,\varphi) = 0.$$

Besteht umgekehrt die Gleichung (54 b) und die dritte Gleichung (54), so läßt sich ϱ so bestimmen, daß die Gleichungen (53 a) und (51 c) sich auf eine Gleichung reduzieren. Vermöge der dritten Gleichung (54) wird die Gleichung (44), welche mit (53 a) identisch ist:

$$W_{\alpha\beta}[W, q] + W_\alpha W_\beta \{[r', q] + i(q, \varphi)\} = 0;$$

so daß wegen (54 b) auch die Gleichung (51 a) erfüllt ist. Man findet also eine besondere Klasse von Biegungsflächen der gegebenen Fläche, indem man φ aus der dritten Gleichung (54) und darauf r' durch die partielle Gleichung (54 c) berechnet; $\mathfrak{W}$, Φ, Ψ ergeben sich dann aus (52), (40) und (40 a).

Unendlich viele, von einer willkürlichen Funktion abhängige Biegungsflächen der gegebenen Fläche findet man hiernach durch Lösung einer partiellen linearen Differentialgleichung erster Ordnung und durch Quadraturen.

Diese Flächen gehören nicht zu den beiden Klassen, die wir in Nr. 5 aufstellten und die zu der gegebenen Fundamentalgröße F gehörten. Man findet daher alle, von zwei willkürlichen Funktionen abhängigen Biegungsflächen, indem man zuerst eine der beiden Klassen aufstellt, die sich zufolge Nr. 5 aus der Größe F ableiten lassen, und dann aus jeder dieser Flächen gemäß den Gleichungen (54) und (54 c) weitere, von einer andern willkürlichen Funktion abhängige Flächen bestimmt.

Hiermit ist auch die Aufstellung aller Flächen mit gegebenem Linienelemente auf die Lösung zweier sukzessiver partieller Gleichungen erster Ordnung zurückgeführt.

Aus (49) folgt noch:

$$(\varphi, P)\, T = (\varphi, p)\, t. \tag{55}$$

Auch diese Gleichung könnte man statt (51 a) benutzen, denn sie geht wie diese aus (49) hervor. Sie wird mit (53 a) identisch, wenn:

$$\begin{aligned} W_\alpha e^{i\varphi} &= \varrho\,(p_\alpha t - P_\alpha T), \quad W_\beta e^{-i\varphi} = \varrho\,(p_\beta t - P_\beta T) \\ &= -i\varrho\,\varphi_\alpha \qquad\qquad = -i\varrho\,\varphi_\beta, \text{ also:} \end{aligned}$$

$$(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})\, W_{\alpha\beta} + e^{i\varphi} W_\alpha r'_\beta + e^{-i\varphi} W_\beta r'_\alpha = 0,$$

$$W_\alpha e^{i\varphi} \varphi_\beta - W_\beta e^{-i\varphi} \varphi_\alpha = 0. \tag{55a}$$

Aus der zweiten Gleichung wird φ, aus der ersten sodann $r' = \lg r$ gefunden, je durch eine partielle Gleichung erster Ordnung. Durch die beiden Gleichungen (55) findet man also alle (von zwei willkürlichen Funktionen abhängigen) Biegungsflächen der gegebenen Fläche (1).

Daß die so gefundene Funktion ζ der Differentialgleichung (7) oder (37) genügt, erkennt man in folgender Weise. Es ist nach (47), (41) und (53):

$$\frac{\zeta_{\alpha\alpha}}{\zeta_\alpha} = -\frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\zeta_\beta} - 2\omega_\alpha t + 2\mathfrak{W}_\alpha T + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta}$$

$$= \Psi_\alpha T + 2\mathfrak{W}_\alpha T - 2\omega_\alpha t - \mu_\alpha t + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha}$$

$$= \Phi_\alpha T - \lambda_\alpha t + \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha}, \quad \text{wenn } t = \operatorname{tg}\omega, \quad T = \operatorname{tg}\mathfrak{W},$$

ebenso: $$\frac{\zeta_{\alpha\beta}}{\zeta_\beta} = -\Psi_\beta T + \mu_\beta t + \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta}, \quad \text{ferner:}$$

$$\frac{F_\alpha}{F} = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\beta} - 2\omega_\alpha t = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} - \lambda_\alpha t, \quad \frac{F_\beta}{F} = \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} + \mu_\beta t.$$

Sei also zur Abkürzung:

$$\mathfrak{G} = \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha} - \lambda_\alpha t, \quad \mathfrak{H} = \frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta} + \mu_\beta t,$$

so wird die linke Seite der Gleichung (37):

$$(\mathfrak{G} + \Phi_\alpha T)(\mathfrak{H} - \Psi_\beta T) - \mathfrak{G}(\mathfrak{H} - \Psi_\beta T) - \mathfrak{H}(\mathfrak{G} + \Phi_\alpha T)$$

$$+ \mathfrak{G}\mathfrak{H} - \frac{\zeta_{\alpha\beta}^2}{\zeta_\alpha \zeta_\beta} = -\Phi_\alpha \Psi_\beta T^2 - \frac{\zeta_{\alpha\beta}^2}{\zeta_\alpha \zeta_\beta} = (\Phi_\beta \Psi_\alpha - \Phi_\alpha \Psi_\beta) T^2,$$

und denselben Wert nimmt die rechte Seite an, analog wie oben bei Gleichung (37) in Nr. 6.

10. Als Beispiel betrachten wir die Biegungsflächen der Rotationsflächen. Ist eine Rotationsfläche durch die Gleichungen

$$x = F_1(\alpha-\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta), \quad y = F_1(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta), \quad z = \Phi(\alpha-\beta),$$

$$\Phi'^2 + F_1^2 + F_1'^2 = 0$$

dargestellt, so ist ($\lambda - \mu = 2\omega$) für die gegebene Fläche

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{F_1'}{F_1}, \quad \lambda_\beta = \frac{F'^2 + F_1 F_1''}{F_1^2 + F_1'^2}, \quad \lambda_\alpha = \frac{F_1'^2 - F_1 F_1''}{F_1^2 + F_1'^2},$$

$$F = 2\cos^2\omega \cdot W_\alpha W_\beta = 2F_1^2 = \psi(\alpha - \beta),$$

also $F_{\alpha\beta}$ eine Funktion allein von $\alpha - \beta$, die wir mit $\chi(\alpha - \beta)$ bezeichnen (vgl. § 5 der Abhandlung).

Aus (34) findet man die Gleichungen der Charakteristiken in der Form:

$$2ap = a^2 - b - \chi, \quad 2aq = a^2 + b\chi,$$

$$\alpha + \beta = \int \frac{da - d\beta}{\chi + b} + c, \quad a\,\mathfrak{w} = \int \chi\,(da - d\beta) + c',$$

wenn a, b, c, c' Konstante bedeuten.

Ist $\mathfrak{w}$ und somit ω gefunden, so ist auch W und q bekannt und r' bestimmt sich aus (54 c).

Die am Schlusse von Nr. 5 angegebene Methode verlangt die Lösung der Gleichungen (55 a), d. h. hier:

$$-(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})\,\Phi''(\alpha - \beta) + (e^{i\varphi} r'_\beta - e^{-i\varphi} r'_\alpha)\,\Phi'(\alpha - \beta) = 0,$$

$$e^{i\varphi}\varphi_\beta + e^{-i\varphi}\varphi_\alpha = 0.$$

Aus letzterer Gleichung findet man

$$a\,e^{i\varphi} - \beta\,e^{-i\varphi} = f(\varphi),$$

wenn f eine willkürliche Funktion bezeichnet; für r' ist noch eine lineare partielle Gleichung erster Ordnung zu lösen. Soll die neue Fläche wieder eine Rotationsfläche werden, so muß $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $r =$ Konst. sein (vgl. § 6 der Abhandlung).

Die so gefundenen Flächen sind bekanntlich die Evolutenflächen der von Weingarten studierten Flächen, zwischen deren Krümmungsradien eine Relation besteht; auch letztere Flächen können demnach angegeben werden.

Versuchsweise machen wir den Ansatz:

$$\lambda = \mathfrak{F}(\alpha - \beta)\cdot\alpha + \mathfrak{F}_1(\alpha - \beta). \tag{56}$$

Zwischen den Funktionen ψ_1 und $\mathfrak{F}$ bestehe die Bedingung:

$$\frac{\psi'_1(\alpha - \beta)\cdot\mathfrak{F}(\alpha - \beta)}{\cos^2\psi_1} = \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 - \frac{\psi''}{\psi}, \tag{56a}$$

wo $\psi = F'$ die gegebene Funktion von $\alpha - \beta$ bezeichnet. Entsprechend wird:

$$\mu = \mathfrak{F}(\alpha - \beta)\cdot\beta + \mathfrak{F}_2(\alpha - \beta), \tag{57}$$

$$\lambda - \mu = (\alpha - \beta)\,\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_1(\alpha - \beta) - \mathfrak{F}_2(\alpha - \beta) = 2\psi_1 = 2\omega. \tag{58}$$

Hier ist $\lambda - \mu$ rein imaginär, ebenso $\alpha - \beta$; also ist $\mathfrak{F}$ eine reelle Funktion von $\alpha - \beta$, $\mathfrak{F}_2$ ist zu $\mathfrak{F}_1$ konjugiert imaginär. Zwischen den vier Funktionen ψ_1, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bestehen die beiden Gleichungen (56a) und (58), so daß $\mathfrak{F}$ durch ψ_1 bestimmt ist und der imaginäre Teil von $\mathfrak{F}_1$ gemäß (58) sich aus $\mathfrak{F}$ und ψ_1 berechnet, während der reelle Teil von $\mathfrak{F}_1$ (und $\mathfrak{F}_2$) willkürlich bleibt.

Endlich findet man W aus (2) durch Quadratur:

$$\lg W_\alpha = \int \lambda_\beta \operatorname{tg}\omega \, d\beta = -\int [\mathfrak{F}'(\alpha-\beta)\cdot\alpha + \mathfrak{F}_1(\alpha-\beta)] \operatorname{tg}\psi_1(\alpha-\beta)\cdot d\beta + C, \tag{59}$$

wo C noch eine Funktion von α sein kann; ebenso

$$\lg W_\beta = -\int \mu_\alpha \operatorname{tg}\omega \, d\alpha = -\int [\mathfrak{F}'(\alpha-\beta)\cdot\beta + \mathfrak{F}_2(\alpha-\beta)] \operatorname{tg}\psi_1(\alpha-\beta)\cdot d\alpha + C', \tag{60}$$

wo C' noch von β abhängen kann.

Daß die Gleichung (6), d. h. $\psi(\alpha-\beta) = 2 W_\alpha W_\beta \cos^2\omega$ durch die Werte (59) und (60) tatsächlich erfüllt wird, erkennt man in folgender Weise: es ist

$$\begin{aligned}
\lg W_\alpha &= \alpha \int \mathfrak{F}'(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}\psi_1\cdot d(\alpha-\beta) \\
&\quad + \int \mathfrak{F}_1(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}\psi_1\cdot d(\alpha-\beta), \\
\lg W_\beta &= -\beta \int \mathfrak{F}'(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\psi_1\cdot d(\alpha-\beta) \\
&\quad - \int \mathfrak{F}_2(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}\psi_1\cdot d(\alpha-\beta),
\end{aligned}$$

also:

$$\lg W_\alpha W_\beta = (\alpha-\beta)\cdot J_1 + J_2,$$

und hierin durch partielle Integration unter Benutzung von (56a):

$$J_1 = \mathfrak{F}(\alpha-\beta)\cdot\operatorname{tg}\psi_1 - \int \mathfrak{F}\frac{\psi_1'}{\cos^2\psi_1}\,d(\alpha-\beta) = \mathfrak{F}\cdot\operatorname{tg}\psi_1 - \frac{\partial \lg F}{\partial\beta},$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= (\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2)\cdot\operatorname{tg}\psi_1 - \int (\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2\frac{\psi_1'}{\cos^2\psi_1}\,d(\alpha-\beta) \\
&= (\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2)\ \operatorname{tg}\psi_1 - \int (2\psi_1-(\alpha-\beta)\mathfrak{F})\ \frac{\psi_1'}{\cos^2\psi_1}\,d(\alpha-\beta) \\
&= (\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2)\operatorname{tg}\psi_1 - 2\psi_1\operatorname{tg}\psi_1 + 2\int \psi_1'\operatorname{tg}\psi_1\,d(\alpha-\beta) + \int(\alpha-\beta)\frac{\partial^2 \lg F}{\partial\alpha\,\partial\beta}d(\alpha-\beta) \\
&= (\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2)\operatorname{tg}\psi_1 - 2\psi_1\operatorname{tg}\psi_1 - 2\lg\cos\psi_1 + \frac{\partial \lg F}{\partial\beta}(\alpha-\beta) - \int\frac{\partial \lg F}{\partial\beta}d(\alpha-\beta).
\end{aligned}$$

Das letzte Glied der rechten Seite ist gleich $\log F$; und somit wird in der Tat: $\log F = \lg(2 W_\alpha W_\beta \cos^2\psi_1)$ bei passender Bestimmung der Integrationskonstanten.

Aber hier ist noch die Bedingung zu erfüllen, daß $W_\alpha d\alpha + W_\beta d\beta$ ein vollständiges Differential sei; das ist nur erfüllt, wenn $\mathfrak{F}(\alpha - \beta) = \text{Konst.}$, und wenn $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 =$ reell ist.

Für die Rotationsfläche der Kettenlinie ist $F_1 = a \cdot \cos(\alpha - \beta)$, wo a eine Konstante bezeichnet (vgl. § 12 der Abhandlung), also

$$F = 2F_1^2 = \psi = 2a^2 \cdot \cos^2(\alpha - \beta).$$

Für die Kugel vom Radius 1 ist (vgl. § 5 der Abhandlung):

$$F = 2F_1^2 = \psi(\alpha - \beta) = \frac{2}{\cos^2(\alpha - \beta)}.$$

Da hiermit die Bestimmung aller Flächen konstanten Krümmungsmasse auf partielle Gleichungen erster Ordnung zurückgeführt ist, so ist damit indirekt auch die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \, \partial v} = \sin z$$

geleistet; vgl. meine frühere Arbeit in den Sitzungsberichten der Akademie von 1922, S. 22. Damals hatte ich obige Gleichung (55) noch nicht aufgestellt; deshalb müssen einige Angaben dieser Arbeit über die Art der einzuführenden willkürlichen Funktionen abgeändert werden.

11. Aus demselben Grunde leidet die Abhandlung an einer Lücke, indem den willkürlichen Funktionen der Lösung ein zu großer Spielraum eingeräumt wurde, wie die Herren Liebmann und Kommerell richtig bemerkten. Unter Hinzunahme der Gleichungen (33) und (55) wird diese Lücke ausgefüllt, und unter Benutzung der früher aufgestellten Gleichungen gelingt es doch wieder, die Lösung auf bekannte Probleme zurückzuführen.

Die auf Seite 27 der Abhandlung über die Integration der Gleichung $s = \sin z$ gemachten Angaben, welche Operationen zur Bestimmung von R, R', Φ, Ψ auszuführen sind, müssen auf Grund der jetzt erreichten Resultate abgeändert werden.

Ferner ist als Ergänzung zu der Abhandlung hervorzuheben, daß die in § 7 derselben besprochene Schwierigkeit tatsächlich nicht besteht; infolgedessen führt das in § 8 angeführte Verfahren zwar zu neuen Lösungen der Bourschen Differentialgleichung,

aber nicht zu neuen Flächen, sondern nur zu orthogonalen Transformationen der gegebenen Fläche; man weist das durch geschickte Anwendung der Relationen für die Koeffizienten der orthogonalen Transformation nach, wie ich es für die Kugel tat. Die Anwendbarkeit der von mir befolgten Methode der Variation der Konstanten wird dadurch nicht gestört.

12. Endlich betrachten wir noch das Beispiel der Minimalflächen; eine solche Fläche ist dargestellt durch die Gleichungen (vgl. § 12 der Abhandlung):

$$x = i\int[\cos 2\alpha\cdot A'\,d\alpha - \cos 2\beta\cdot B'\,d\beta],$$
$$y = i\int[\sin 2\alpha\cdot A'\,d\alpha - \sin 2\beta\cdot B'\,d\beta],\quad z = A + B,$$

wo A eine Funktion von α, B eine solche von β bezeichnet.

Es ist

$$\lambda = 2\alpha,\quad \mu = 2\beta,\quad \omega = \alpha - \beta,$$
$$F = 2\,A'B'\cdot\operatorname{cosin}^2(\alpha - \beta).$$

Wählt man A und B als Variable, so werden die Gleichungen

$$x = i\int[\cos 2\mathfrak{A}\cdot dA - \cos 2\mathfrak{B}\cdot dB],$$
$$y = i\int[\sin 2\mathfrak{A}\cdot dA - \sin 2\mathfrak{B}\cdot dB],\quad z = A + B,$$
$$F = 2\cos^2(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}),\quad \omega = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}.$$

Die Gleichung (44) wird hier, da $W_{AB} = 0$ ist:

$$\frac{\partial R}{\partial B} + \frac{\partial R'}{\partial A} = 0,$$

man darf daher setzen

$$R = \frac{\partial P}{\partial A},\quad R' = -\frac{\partial P}{\partial B},$$

und dann erhält man aus (43):

$$\xi = \int\left[\cos\Phi\cdot\frac{\partial P}{\partial A}\cdot dA - \cos\Psi\cdot\frac{\partial P}{\partial B}\cdot dB\right],$$
$$\eta = \int\left[\sin\Phi\cdot\frac{\partial P}{\partial A}\cdot dA - \sin\Psi\cdot\frac{\partial P}{\partial B}\cdot dB\right],\quad \zeta = iP(A, B),$$

wo P eine rein imaginäre Funktion bezeichnet. Es sind das die Gleichungen (98) der Abhandlung, aber P ist nicht willkürlich wählbar, sondern genügt der Gleichung (52)

$$-\frac{\partial P}{\partial A}\frac{\partial P}{\partial B}\cos^2\mathfrak{W} = \cos^2(\alpha-\beta).$$

Die Gleichungen (55 a) werden hier:

$$e^{i\varphi}\varphi_B - e^{-i\varphi}\varphi_A = 0, \quad e^{i\varphi}r'_B + e^{-i\varphi}r'_A = 0.$$

Für die Bonnet-Schwarzschen Biegungsflächen ist $r = 1$, $\varphi =$ konst.

Die Integration geschieht analog wie bei den Rotationsflächen.

Es genügt P auch den aus (38) und (40) folgenden Gleichungen ($\mathfrak{L} = \lg\operatorname{tg}\omega$):

$$\frac{2}{\cos^2(\alpha-\beta)} = \mathfrak{L}_\alpha\frac{\partial\lg P_A}{\partial\beta} - \mathfrak{L}_\beta\left(\frac{\partial\lg P_A}{\partial\alpha} + 2\operatorname{tg}\omega\right)$$
$$= -\mathfrak{L}_\beta\frac{\partial\lg P_B}{\partial\alpha} + \mathfrak{L}_\alpha\left(\frac{\partial\lg P_B}{\partial\beta} + 2\operatorname{tg}\omega\right).$$

Verbesserung.

Seite 195, Zeile 10 und 6 v. u. Lies: „(55)“ statt „(19)“.

Seite 195, Zeile 13 v. u. Lies: „zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und eine Reihe von Quadraturen“ statt „eine Reihe von Quadraturen“.

Einfluss der Überreife der Geschlechtszellen auf das Geschlecht von Lymantria dispar.

Von **Richard Hertwig.**

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juli 1923.

Das Resultat früherer Untersuchungen, daß Überreife der Eier bei den Fröschen die Entwicklung des männlichen Geschlechts begünstigt und von einem Zeitpunkt ab zur Bildung einer ausschließlich männlichen Nachkommenschaft führt, hatte mich veranlaßt, den Ursachen nachzugehen, welche diese so ausgesprochene sexuelle Umstimmung der Eizellen verursacht. Ich hatte daher, als der Friedensschluß und der Eintritt geordneter Zustände es gestatteten, meine Untersuchungen wieder aufgenommen und dabei eine Entwicklungsserie erzielt, welche erkennen läßt, daß es sich im Gegensatz zu früher geäußerten Ansichten um einen Fall von metagamer Geschlechtsbestimmung handelt. Früher hatte ich es für wahrscheinlich gehalten, daß die vom Gewöhnlichen abweichende Geschlechtsbestimmung progam erfolge und durch den besonderen Verlauf der Eireife bedingt werde; ich hatte dabei die zwei Möglichkeiten erörtert, die sich ergeben, je nachdem sich die noch immer nicht mit Sicherheit gelöste Frage entscheiden sollte, ob das männliche oder weibliche Geschlecht heterogamet ist. Ein besonders günstig gelagerter Fall führte nun zu folgendem, eine progame Geschlechtsbestimmung ausschließendem Resultate. Ich hatte ein Froschweibchen, welches einer „indifferenten Rasse“ angehörte, bei der also die Gonaden lange auf einem Zustand der Indifferenz verharren, mit einem Männchen von einer Rasse, bei welcher es sehr frühzeitig möglich ist, Hoden und Eierstock zu unterscheiden, gekreuzt und dabei Parallelkulturen eingerichtet, 1. eine Normalkultur und 2. eine Überreifekultur (Überreife 68 St.).

Von jeder Kultur hatte ich Material auf verschiedenen Entwicklungsstadien abgetötet: a) Kaulquappen mit gut entwickelten Hinterbeinen, b) junge ausmetamorphosierte Fröschchen, c) Fröschchen, die überwintert hatten und zu ansehnlichen Tieren herangefüttert worden waren. Für die Normalkultur ergab die Untersuchung der Gonaden folgendes: 1. Erste Abtötung 46 indifferente Tiere. 2. Während der Metamorphose abgetötete Tiere zeigten die Gonaden in Umwandlung. 3. Von den 7 überwinterten Tieren waren 6 Weibchen, 1 Männchen. Anders gestaltete sich das Resultat bei den Überreifekulturen. Bei ihnen ließen sich bei der ersten Abtötung (a) noch zwei Gruppen in nahezu gleicher Zahl unterscheiden: 1. Kaulquappen mit schwach entwickelten Hoden, und 2. solche mit indifferenten Gonaden. Die Abtötung b ergab, was durch die Abtötung c dann weiter bestätigt wurde, daß fast alle Tiere Männchen waren bis auf einen geringen Prozentsatz Weibchen. Aus diesen Ergebnissen zog ich den Schluß, daß Überreife in zweierlei Hinsicht das männliche Geschlecht begünstigt, einmal, indem es die sexuelle Differenzierung der indifferent erscheinenden, für die Entwicklung zu Hoden bestimmten Gonaden beschleunigt, ferner, indem sie bewirkt, daß Gonaden, die unter normalen Verhältnissen zu Ovarien geworden wären, sich sekundär zu Hoden umwandeln.

Will man diese Ergebnisse in Übereinstimmung bringen mit der immer mehr an Boden gewinnenden Auffassung, daß die Geschlechter durch verschiedene Beschaffenheit des Chromosomenbestandes unterschieden sind, so werden wir zur Annahme geführt, daß bei den Fröschen wie bei den meisten Tieren das weibliche Geschlecht homogamet ist und nur einerlei Eier erzeugt, die sämtlich das x Chromosom besitzen, während das Männchen heterogamet ist und zweierlei Spermatozoen bildet, solche mit einem x Chromosom und andere ohne x Chromosom oder mit einem y Chromosom. Die durch Überreife bedingte Umbildung von Weibchen zu Männchen wäre dann so zu verstehen, daß der weibliche Chromosomen-Komplex xx in einen männlichen verwandelt wird, indem ein x entweder ganz rückgebildet oder in seiner Wirkungsweise abgeschwächt wird. Es ist das ein Vorgang, für den bekanntlich in der Literatur Analogien vorliegen (Umbildung des weiblichen *Rhabdonema nigrovenosum* in ein hermaphrodites Tier).

Ich benutze die sich mir bietende Gelegenheit, um auf eine Arbeit einzugehen, die von einem ganz anderen Beobachtungsmaterial ausgehend zu dem gleichen Ergebnis gelangt ist, wie es hier dargestellt wurde, daß bei Fröschen das homogamete Weibchen in das heterogamete Männchen verwandelt werden könne, indem das zweite *x* Chromosom in seiner Wirkung bis zu einer Männlichkeit erzeugenden Beschaffenheit abgeschwächt wird. Crew wurde zu dieser Auffassung durch das Studium hermaphroditer Frösche geführt. Durch das Studium von zahlreichen teils in der Literatur beschriebenen, zu einem großen Teil von ihm selbst untersuchten Fällen gelang es ihm, eine Reihe zu konstruieren, an deren einem Ende sich Weibchen befinden, bei denen die ersten Anfänge zu Männlichkeit auftreten, am anderen Ende Männchen, bei denen nur noch geringe Reste weiblicher Konstitution erkennbar sind. Letztere können funktionsfähige Hoden enthalten und sind dann befähigt, Weibchen zu begatten und Eier, die sich normal entwickeln, zu befruchten. Ein derartiges sekundäres Männchen von *Rana temporaria* war für Crews Deutung maßgebend gewesen. Es hatte ein Weibchen begattet, dessen Laich zu anderweitigen Zwecken aufgezogen worden war. Aus demselben entwickelten sich ausschließlich Weibchen, ein interessanter Fall, für den kein Präcedenz in der Literatur vorliegt. Aus diesem entwicklungsgeschichtlichen Resultat schließt der Verfasser, daß das zur Begattung benutzte Männchen homogamet gewesen war und 2 *x* Chromosomen besaß, daß es daher nur Weibchen erzeugende Spermatozoen liefern konnte. In der Tat stellte sich das benutzte Männchen als ein Hermaphrodit heraus. Den Auffassungen Crews hat sich Huxley, der sich auch mit dem Sexualitätsproblem beschäftigt, angeschlossen. Endlich ist auch Witschi ganz unabhängig von Crew zu dem Resultat gekommen, daß bei den Fröschen das männliche Geschlecht das heterogamete sei und daß hermaphrodite Tiere von Weibchen abgeleitet werden müssen, indem das zweite *x* Chromosom eine Abschwächung erfährt.

Noch ehe ich die hier kurz referierten Arbeiten über Geschlechtsbestimmung bei *Rana esculenta* begonnen hatte, hatte ich den Plan gefaßt, meine Überreife-Untersuchungen auf *Insekten* auszudehnen und zwar auf Formen, bei denen die Frage, welches

Geschlecht das heterogamete ist, schon durch Beobachtung entschieden ist. Solche Formen sind die *Schmetterlinge*, bei denen durch die schönen Untersuchungen Seilers über *Psychiden* festgestellt worden war, daß die Männchen homogamet sind und somit zwei Geschlechtschromosomen besitzen, während bei den Weibchen nur ein Geschlechtschromosom vorhanden ist. Daß weibliche Heterogametie allen Schmetterlingen zukommt, ist in hohem Maß wahrscheinlich, da schon seit längerer Zeit die an *Abraxas grossulariata* angestellten Experimente über geschlechtsbegrenzte Vererbung zu Resultaten geführt hatten, welche nur durch die Annahme weiblicher Heterogametie zu erklären waren. Die Wahl der Schmetterlinge wurde mir auch aus anderweitigen Erwägungen nahe gelegt. Sie bilden vermöge ihrer weiblichen Heterogametie eine willkommene Ergänzung zu den Amphibien, bei denen, wie ich hervorgehoben habe, wahrscheinlich das Männchen heterogamet ist. Auch ermöglichte mir das freundliche Entgegenkommen von Prof. Goldschmidt vom Kaiser Wilhelms-Institut für Biologie in Dahlem meine Untersuchungen mit einem durch seine Zuchten gut analysierten Material zu beginnen. Und so habe ich schon im Sommer 1921 angefangen, *Lymantria dispar* var. *japonica* mit Rücksicht auf Überreife zu züchten. Über die ersten Ergebnisse meiner Kulturen habe ich schon kurz berichten können; sie wurden an einem sehr kleinen und daher für allgemeine Schlußfolgerungen unzureichenden Material gewonnen, so daß ich mich nur mit der größten Vorsicht über sie äußern konnte. Es schien, als ob bei *Lymantria* Überreife der Eier genau den entgegengesetzten Effekt wie bei Fröschen ausübe, indem bei Überreifekulturen die Zahl der Weibchen eine freilich nur unbedeutende Steigerung erfahren hätte. Zunächst kam mir dieses Resultat unerwartet. Es ließ aber bei näherer Prüfung sich mit den bei Fröschen erzielten Ergebnissen in Übereinstimmung bringen und ermöglichte eine für beide Fälle gültige allgemeine Formel, nämlich, daß durch Überreife jedesmal das homogamete Geschlecht betroffen und durch Rückbildung resp. Abschwächung des zweiten Geschlechtschromosoms in das heterogamete verwandelt würde.

Je bestechender nun auch diese allgemeine Formel war, um so mehr hatte ich das Bedürfnis, sie auf ihre Berechtigung durch erneute Untersuchungen zu prüfen. Diese Überprüfung war um

so notwendiger, als Seiler bei seinen Überreife-Experimenten an *Psychiden* zu einem entgegengesetzten Resultat gekommen war, daß auch hier wie bei Fröschen durch Überreife das männliche Geschlecht begünstigt werde. Er stützte sich freilich hierbei nicht auf Zuchtresultate. Diese waren ihm durch ungünstige, mit den politischen Ereignissen im Zusammenhang stehende Ereignisse vereitelt worden. Vielmehr hatte er den äußerst mühsamen Weg der Untersuchung der Reifeteilungen der Eier eingeschlagen und gefunden, daß bei einem verhältnismäßig hohen Prozentsatz derselben das Geschlechtschromosom im Ei zurückbehalten wurde. Da nun infolge der männlichen Homogametie nur einerlei Spermatozoen, solche mit Geschlechtschromosomen gebildet werden, müssen bei der Befruchtung unverhältnismäßig viele Eier mit 2 Geschlechtschromosomen, d. h. Männcheneier, resultieren.

Ein weiteres Moment, welches neue Experimente nötig machte, war folgendes: Wie ich schon in meiner früheren Veröffentlichung hervorgehoben habe, sind die Insekteneier für Überreife-Experimente bei weitem nicht das günstige Material, wie die Amphibieneier. Bei den Fröschen kann man von einem und demselben Weibchen zweierlei Eimassen erzielen, normalreife und solche, die 2—4 Tage überreif sind; man kann so bei einem und demselben Tiere das überreife Material mit dem normalreifen vergleichen. Bei Schmetterlingen ist das nicht möglich, wenigstens nicht bei *Lymantria*. Hier werden die Eier nach der Begattung normalerweise in einem einheitlichen Gelege abgelegt. Nur ab und zu werden kleinere Eimengen mehrere Stunden, sehr selten sogar mehrere Tage noch zurückgehalten. Man ist daher gezwungen, Gelege von verschiedenen Schmetterlingen miteinander zu vergleichen, von solchen, die sofort nach dem Ausschlüpfen begattet wurden, und anderen, die längere Zeit vom Männchen getrennt geblieben waren. Man kann daher nur verschiedene, verschieden reife Tiere auf ihre Sexualitätsziffer untereinander vergleichen, ohne mit Sicherheit entscheiden zu können, ob etwa zu Tage tretende Unterschiede durch Verschiedenheiten in der sexuellen Potenz der einzelnen Pärchen oder durch verschiedene Grade der Reife ihrer Eier bedingt sind. Diesem Einwurf kann nur begegnet werden, wenn man zahlreiche Überreifekulturen erzielt

und feststellt, daß diese immer die gleiche, dem Grad der Überreife parallele Verschiebung der Sexualitätsziffer zeigen.

Die hier kurz skizzierten und eine Reihe weiterer Erwägungen sind Ursache gewesen, daß ich in demselben Jahre, in dem ich meine ersten Züchtungsresultate erzielte (1921), umfangreiche Zuchten für das kommende Jahr (1922) ansetzte. Bei denselben berücksichtigte ich nicht nur die Überreife des Weibchens, sondern auch — was sich bei Fröschen als wirkungslos erwiesen hatte — Überreife des Männchens. Um größere Sicherheit der Resultate zu gewinnen, wiederholte ich meine Versuche noch ein weiteres (im Ganzen drittes) Mal, indem ich die im Sommer 1922 erzielten Schmetterlinge zu Überreifekulturen benutzte, die im Sommer 1923 zum Ausschlüpfen gelangten. In beiden Zuchtserien wurde auch die Frage berücksichtigt, ob alle Eier eines Geleges ausgeschlüpft waren. Dabei stellte es sich heraus, daß diese Voraussetzung bei einem großen Teil der Gelege, auch bei solchen, von denen ich viele Raupen gewonnen hatte, nicht zutraf. Bei hochgradiger Überreife schlüpften überhaupt keine Raupen aus. Hier galt es nun zu entscheiden, ob die versagenden Eier überhaupt nicht befruchtet worden waren oder trotz Befruchtung sich nicht bis zu einer lebensfähigen Raupe entwickelt hatten. Die Untersuchung der Gelege habe ich aus Mangel an Zeit erst mehrere Monate nach Beendigung der Kulturen vornehmen können. Immerhin ließ sich das Wichtigste noch feststellen. Es stellte sich heraus, daß man außer den leicht erkennbaren Schalenresten ausgeschlüpfter Eier noch zwei Kategorien von Eiern unterscheiden konnte. Die einen sahen schwärzlich aus, weil sie eine dunkel pigmentierte Raupe enthielten, deren Kopfschild besonders durch schwarze Farbe auffällt. Bei manchen dieser Eier war die Raupe zum Teil ausgeschlüpft, was dann überleitet zu Raupen, die ausgeschlüpft, aber nicht kräftig genug waren, um sich aus den Wollfasern des Geleges herauszuarbeiten und schließlich zu solchen, die zwar das Gelege verließen, aber auch die zartesten Triebe von Kreuzdorn nicht annahmen und daher verhungerten. Außer den schwärzlichen Eiern gab es noch bräunlich gefärbte, letztere namentlich in Gelegen, bei denen sich keine einzige Raupe entwickelt hatte. Ob hier Eier vorlagen, bei denen die Befruchtung ausgeblieben oder die

Entwicklung frühzeitig zum Stillstand gekommen war, ließ sich an dem eingetrockneten Material nicht mehr entscheiden. Andeutungen eines Embryo waren jedenfalls nicht zu erkennen.

Bei meinem ersten Versuch, den Einfluß der Überreife auf die Eier von *Lymantria dispar* zu studieren, ließ ich mich von den in der Literatur vorliegenden Angaben bestimmen, daß eine normale Eiablage bei Schmetterlingen, bei welchen mehr als 5 Tage seit dem Schlüpfen verstrichen waren, nicht mehr zu Stande komme. In der Tat entwickelten sich auch von einem 6 Tage alten Weibchen nur 12 Räupchen, während ein Gelege etwa mehrere Hundert Eier enthält, und auch von diesen 12 entwickelten sich nur 7 zu kräftigen Raupen, bei denen das Geschlecht bestimmt werden konnte. In der Zeit meiner Kulturen herrschte damals eine sehr hohe Temperatur, 20—25° C. Bei meinen neuerlichen Versuchen habe ich daher versucht, ob nicht durch Kultur bei niederen Temperaturen sich der Zeitraum, in welchem eine normale Entwicklung, wenn auch vielleicht nur für einen Teil des Eimaterials möglich ist, verlängern ließe. Ich hielt daher einen Teil meiner Schmetterlinge bei einer konstanten Temperatur von 12°, während ein anderer Teil bei wenig schwankender Zimmertemperatur (cca. 20—25° C.) gezüchtet wurde. So gelang es mir, von Schmetterlingen, die 14 Tage lang überreif waren, noch leidlich normal aussehende Gelege zu erzielen, aus denen auch ein großer Teil der Eier schlüpfte. Dagegen war die äusserste Grenze der Entwicklungsmöglichkeit bei Zimmertemperatur mit 6—7, selten 8—9 Tagen gegeben.

In den im folgenden mitzuteilenden Untersuchungen habe ich leider keine genaueren Angaben machen können, in welchem Zahlenverhältnisse sich die geschlüpften Raupen zu den im Fadengewirr des Geleges zurückgehaltenen oder in den Eischalen verbliebenen Raupen, resp. zu den bräunlichen, wahrscheinlich unbefruchtet gebliebenen Eiern standen. Die Eier sind in dem dichten Filz der Wollfäden so fest eingebettet, daß sie sich mechanisch nicht isolieren lassen. Bei meinen neuesten Untersuchungen bin ich auf ein Verfahren gekommen, um auch diesen Übelstand zu beseitigen. Wenn man ein Gelege in Kalilauge digeriert, löst sich der Kitt, durch welchen Eier und Wollfäden zu einer Masse verklebt werden, und man kann damit die Eier isolieren und ihre

Zahl und ihren Entwicklungszustand feststellen. Leider hatte ich die Gelege, die aus dem Jahre 1921 stammten und die einer oberflächlichen Untersuchung unterworfen worden waren, schon weggeworfen, ehe ich auf das eine genaue Zählung ermöglichende Verfahren gekommen war. Auch auf einen weiteren Punkt von Wichtigkeit habe ich erst in der Neuzeit Rücksicht genommen, nämlich auf die Frage, ob die Eier sämtlich von dem Schmetterling abgelegt oder zu einem größeren oder geringeren Teil im Körper zurückgehalten worden waren. Ein letztes Moment bezieht sich auf die Frage, ob die Sexualitätsziffer bei dem ersten und letzten Teil des Geleges die gleiche ist.

In den zahlreichen Arbeiten, die sich in der Neuzeit mit der Entwicklungsgeschichte von *Lymantria* beschäftigt haben, ist hervorgehoben worden, daß man einem Gelege schon äußerlich ansehen kann, ob es normal abgesetzt ist oder nicht. Die cca. 300—400 Eier eines Weibchens werden von einer bald mehr grauen, bald mehr bräunlichen Wolle zugedeckt, welche aus feinen verfilzten Fäden besteht. Unter normalen Verhältnissen entsteht dann ein mehrere Zentimeter langer, etwa 2 cm breiter Schwamm, der auf seiner Oberfläche schön geglättet ist und in dessen zentralen Partien die Eier geborgen sind. Wird die Begattung über das Normale hinausgeschoben, so fangen die Weibchen, einige früher, andere später an, Wolle auszuscheiden und zu verstreuen. Allmählich werden auch Eier in unregelmäßigen Haufen abgesetzt, niemals aber vollständig, so daß ein großer Teil der Eier im Abdomen zurückbehalten wird. Derartig unbefruchtet abgelegte Eier entwickeln sich nicht, wie schon wiederholt hervorgehoben worden ist, so daß wir genötigt sind, das Vorkommen von fakultativer Parthenogenesis für *Lymantria* in Abrede zu stellen, wie es ja auch von allen neueren Forschern, die sich mit dem Objekt beschäftigt haben, geschehen ist. Daraus, daß die Weibchen anfangen, Wolle zu bilden und vereinzelte zerstreute Eier abzulegen, darf jedoch nicht gefolgert werden, daß nunmehr keine Aussichten auf Begattung und Bildung eines normalen Geleges gegeben sind. Aus den im folgenden mitzuteilenden kurzen Protokollen ist ersichtlich, daß auch dann noch in manchen Fällen gute Entwicklungsresultate erhalten wurden. Andererseits kommen auch Fälle vor, in denen scheinbar eine normale Begattung

stattgefunden hatte und ein völlig normaler Eierschwamm gebildet worden war, ohne daß Räupchen sich entwickelten.

Die Begattung der Weibchen habe ich übrigens in der Mehrzahl der Fälle nicht festgestellt, weil meine Zeit es mir nicht erlaubte, die hierzu nötige häufige Kontrolle auszuüben. Ich kann daher in vielen Fällen nicht angeben, wie viel Zeit zwischen Begattung und Eiablage verflossen war. Dies muß bei der Beurteilung vieler Kulturen berücksichtigt werden, solcher Kulturen, bei denen die Eiablage erst erfolgte, nachdem schon einige Tage zuvor Männchen und Weibchen in den Zuchtbehältern zusammengetan worden waren. Für die Beurteilung des Grads der Überreife kommt dieser Beobachtungsmangel kaum in Betracht, da wir wissen, daß die Besamung der Eier erst im Moment der Ablage erfolgt, zur Zeit, in der die Eier am Ausführungsgang des Receptaculum seminis vorbeigleiten. Den Grad der Überreife berechne ich daher nicht nach der Zeit der Kopulation, sondern nach der Zeit der Eiablage. Freilich kann ich auch über diese keine bis auf die Stunde genauen Angaben machen, da sie gewöhnlich nachts erfolgt und ich in der Regel nur zweimal die Kulturen kontrollierte, morgens beim Besuch und abends beim Verlassen des Instituts. Aber auch diese Ungenauigkeit spielt keine Rolle, da es gleichgültig ist, ob bei einer Überreife von 6—14 Tagen die Eiablage einige Stunden früher oder später erfolgte.

In einer neuerdings erschienenen Arbeit hat O. Koehler die Frage aufgeworfen, ob nicht auch die Überreife des Spermas einen geschlechtsbestimmenden Einfluß ausüben könne. Er wurde zu dieser Frage durch seine eigenen Untersuchungen an Seeigel-Eiern veranlaßt, Untersuchungen, die ergeben hatten, daß bei Bastardierung die Eier bald mehr nach dem Vater, bald mehr nach der Mutter schlagen, und daß dieser verschiedene Ausschlag nicht nur durch das Alter der Eier, sondern auch durch das Alter der Spermatozoen bestimmt wird. Ich habe dieser Möglichkeit bei meinen neueren Untersuchungen Rechnung getragen und nicht nur die Überreife des Weibchens sondern auch die des Männchens geprüft.

In seinen Arbeiten hat Koehler ferner die Frage erörtert, was man bei den Geschlechtszellen unter den Bezeichnungen Normalreife, Frühreife und Überreife zu verstehen habe. Er macht

mit Recht darauf aufmerksam, daß diese Begriffe bei Pflanzen und Tieren eine ganz verschiedene Bedeutung haben und nicht einmal innerhalb des Tierreichs völlig gleichwertig sind. Letzteres gilt ganz besonders von den Eizellen. Bekanntlich tritt bei den Seeigeln die Reifeteilung und die auf sie folgende Bildung des Eikerns vor der Besamung ein, so daß das Eindringen der Samenfäden auf den Ablauf der Reifeteilungen, speziell auf die so wichtige Reduktionsteilung keinen Einfluß ausüben kann. Das andere Extrem bilden die Nematoden-Eier, die zur Zeit des Eindringens der Spermatozoen noch das Keimbläschen besitzen. Eine vermittelnde Stellung nehmen die Insekten und Wirbeltiere ein. Deren Eier werden unter normalen Verhältnissen befruchtet, wenn das Ei das Keimbläschen rückgebildet und in die erste Reifespindel verwandelt hat, während die Abschnürung des ersten resp. zweiten Richtungskörpers nach dem Eindringen des Samenfadens erfolgt. Bei den Amphibien wird zwar die Vollendung der Eireife auch ohne Einwirkung des Samenfadens durch die Entleerung der Eier in das Wasser herbeigeführt. Indessen kommen derartig künstlich gereifte Eier für uns nicht in Betracht, weil sie nicht mehr befruchtungsfähig sind, da die im Wasser erfolgte Quellung der Eihüllen das Eindringen der Samenfäden unmöglich macht.

Für die im folgenden mitzuteilenden Untersuchungen haben die hier angestellten Erwägungen keine Bedeutung, da die Besamung der Eier bei Amphibien und Schmetterlingen in gleicher Weise auf dem Stadium der ersten resp. zweiten Richtungsspindel erfolgt. Ob freilich der Zeitraum, der von der Auflösung des Keimbläschens bis zur Eiablage verstreicht, bei allen Individuen derselben Art der gleiche ist, läßt sich nicht mit Sicherheit entscheiden.

Bei Fröschen lassen sich im Verlauf der Fortpflanzung zwei Zeiten feststellen, der Zeitpunkt, in welchem das Männchen das Weibchen umklammert und der Zeitpunkt, in dem das Weibchen die Eier absetzt. Der zwischen diesen beiden Vorgängen liegende Zeitraum ist nach meinen Beobachtungen sehr verschieden lang; er kann einerseits unter einem Tag, andererseits mehrere Tage betragen; meist beträgt er bei *Rana esculenta* ca. 24 Stunden. In diesem Zeitraum spielen sich ab: 1. Der Follikelsprung und der Übertritt der Eier in die Eileiter. Zugleich wandelt sich das Keimbläschen in die Richtungsspindel um. 2. Die Bildung der

Eigallerte im Uterus. Die verschiedene Dauer des Zeitraums, der zwischen Umklammerung des Weibchens und Eiablage verstreicht, wird wahrscheinlich durch den ersten Abschnitt bedingt. Es scheint, als ob bei manchen Weibchen der Follikelsprung rasch herbeigeführt wird, bei anderen relativ spät eintritt. Ursache dafür ist wahrscheinlich Verschiedenheit der ovarialen Reife. Ich habe daher früher mit der Möglichkeit ovarialer Früh- und Normalreife gerechnet, je nachdem der Follikelsprung mühsam oder leicht durch die Umklammerung ausgelöst wird. Eine derartige Unterscheidung mag zu Recht bestehen; einen Einfluß auf die Geschlechtsbestimmung habe ich bisher nicht nachweisen können. Bei den vielen Zuchten, die ich angesetzt habe von Eiern, die unter natürlichen Bedingungen abgelegt wurden, ergab sich immer das gleiche Sexualitätsverhältnis 50:50, gleichgültig ob die Copula länger oder kürzer gedauert hatte. Und so kann man bei den Amphibien als Normalreife den Zeitpunkt bezeichnen, in dem unter normalen Bedingungen die Entleerung der Eier erfolgt.

Einfacher als für die Eier liegen die Verhältnisse für die Spermatozoen. Hier ist für alle Tiere der gleiche, gut bestimmbare Zeitpunkt für die Festsetzung des Alters gegeben; es ist der Moment, in dem die Reifeteilungen abgelaufen und die Spermatozyten zweiter Ordnung in die befruchtungsfähigen Spermatozoen umgewandelt sind. Für die Frösche ist es bekannt, daß die Spermatozoen lange am Leben bleiben, ehe sie degenerieren. Nußbaum fand bei *Rana temporaria* noch im Juni, also drei Monate nach der Brunstperiode, Spermatozoen im Hoden. Ich selbst war in der Lage, mich von der Befruchtungsfähigkeit der Samenfäden aus dem Hoden von Männchen zu überzeugen, die vor 4 Wochen die Brunstperiode durchgemacht hatten. Dies wurde mir dadurch ermöglicht, daß ich mir aus Florenz gepaarte, aber vor der Eiablage getrennte Wasserfrösche hatte senden lassen und die Männchen zu künstlicher Befruchtung von Eiern, die von Weibchen aus der Umgebung von München stammten, benutzte. Dabei ergab sich kein Einfluß der Überreife auf die Sexualitätsziffer.

In der Neuzeit sind besonders von Botanikern noch eine Reihe weiterer Faktoren geltend gemacht worden, welche von den Mikrogameten ausgehend möglicherweise einen Einfluß auf das Sexualitätsverhältnis ausüben könnten. Eine wichtige Rolle

spielen die Lethalfaktoren; es könnten die Männchen erzeugenden Mikrogameten bei Überreife länger am Leben bleiben als die Weibchen erzeugenden, es könnte somit das Gegenteil eintreten von dem, was Ursache ist, daß bei *Aphiden* und bei *Rhabdonema nigrovenosum* aus befruchteten Eiern nur Weibchen entstehen. Während in diesen Fällen die Männchen erzeugenden Spermatozoen befruchtungsunfähig sind und für die Geschlechtsbestimmung ausscheiden, könnten bei den von mir untersuchten Fällen die Weibchen erzeugenden Spermatozoen früher absterben. Bei den Fröschen könnte man die Berechtigung dieses Einwands experimentell leicht prüfen, wenn man das Sperma des zur Besamung der überreifen Eier benutzten Männchens gleichzeitig auch benutzen würde, um normal reife Eier zu befruchten. Bei Schmetterlingen, von denen hier zunächst allein die Rede ist, ist ein derartiges Experiment nicht durchführbar.

Man könnte ferner an das, was man in der Neuzeit „*certation*" oder Wettbewerb nennt, denken. Es hat Correus nachgewiesen, daß auch in den Fällen, in denen beiderlei Pollenschläuche lebenskräftig sind, die Weibchen erzeugenden durch ihre raschere Entwicklung im Vorteil sind und beim Herunterwachsen von der Narbe zum Ei die Männchen erzeugenden überholen. Bei *Amphibien* und *Schmetterlingen* ist eine derartige Certation äußerst unwahrscheinlich, weil bei beiden, die bei der Besamung von den Spermatozoen zurückzulegende Wegstrecke zu geringfügig ist.

In den Jahren 1922 und 1923 habe ich sowohl an Fröschen wie Schwammspinnern meine Untersuchungen fortgesetzt. Da die ersteren noch nicht abgeschlossen sind, werde ich mich in dieser Darstellung auf die Schwammspinner beschränken und dabei die im Jahre 1921 angesetzten und im Jahre 1922 abgeschlossenen Kulturen getrennt von denen des folgenden Jahres besprechen.

A. Resultate der im Jahre 1921 angesetzten und im Jahre 1922 zur Geschlechtsbestimmung benutzten Kulturen.

Die Kulturen wurden in der Weise geführt, daß die Raupen und Puppen in Zimmertemperatur gehalten wurden; dagegen wurden die ausgeschlüpften Schmetterlinge zur Erreichung der Überreife zum Teil in einen Kälteapparat bei 11—12° C. verbracht, zum Teil in Zimmertemperatur belassen. Behufs Copula wurden Männ-

chen und Weibchen bei Zimmertemperatur in besondere Zuchtgläser verbracht. Die Gelege wurden in einem ungeheizten, aber vor Frost geschützten Zimmer überwintert. Während ich im März einige Tage abwesend war, trat auffallend warme Witterung ein, was zur Folge hatte, daß auch in dem Zimmer, das zur Unterbringung der Kulturen diente, die Temperatur so erheblich stieg, daß bei einem Teil der Gelege die Räupchen auszukriechen begannen. Ich wurde noch rechtzeitig aufmerksam und konnte durch Einsetzen in einen Eisschrank erreichen, daß ein weiteres Ausschlüpfen der Räupchen unterblieb. Da nur aus dem Gewächshaus des Botanischen Gartens spärliches Futter gewonnen werden konnte, dagegen im Freien alle Bäume noch kahl waren, gelang es mir, nur wenige der verfrüht ausgeschlüpften Raupen aufzuziehen. Die Hauptmasse der Raupen kroch erst im Mai aus, als die Gelege aus dem Kälteschrank in Zimmertemperatur zurückversetzt wurden. Die ausschlüpfenden Raupen wurden mit Weißdorn gefüttert und zum größten Teil auf dem Raupenstadium abgetötet. Ein anderer Teil, von den meisten Kulturen je 50 Stück, wurde bis zur Verpuppung gebracht und die Geschlechtsbestimmung an den Schmetterlingen vorgenommen.

Im folgenden seien die Protokolle der Kulturen wiedergegeben, ehe ich zu einer kritischen Beurteilung meiner Resultate übergehe.

I. Kältekulturen 12° Celsius.

Kultur 1. Ein am 9. Juni geschlüpftes Weibchen wurde mit einem frisch geschlüpften Männchen am 18. Juni zusammengesetzt. Am 19. Juni trat Copula ein; am Abend wurde ein völlig normales Gelege abgelegt. Das Weibchen lebte noch bis zum 24. Juni und hat am 21. Juni noch einen kleinen Eihaufen abgesetzt. Infolge außergewöhnlich warmer Temperatur begann in meiner Abwesenheit das Ausschlüpfen der Raupen am 8. März 1922. Ihre Zahl betrug 55. Durch Kälte wurde der Rest des Geleges am weiteren Ausschlüpfen verhindert. Von den 55 geschlüpften Raupen wurden 45 abgetötet, um bei dem spärlichen und ungeeigneten Futter (aus dem Gewächshaus des Botanischen Gartens) wenigstens 10 zur Aufzucht zu bringen. Indessen gingen auch diese zu Grunde. Nachdem die Möglichkeit Raupen aufzuziehen gegeben, wurde Anfang Mai die Kältebeeinflussung unterbrochen. Am 8. Mai kamen 30 Raupen zur Untersuchung; dabei ergab sich das Verhältnis 25♀:5♂. Im Gelege fanden sich ca. 50% nicht geschlüpfte Eier, die zum Teil Embryonen enthielten, zum Teil bräunlich waren.

Kultur 2. Ein am 9. Juni ausgeschlüpftes Weibchen wurde am 19. Juni mit einem ebenfalls am 9. Juni geschlüpften Männchen zusammengebracht, nachdem es zuvor schon begonnen hatte, Wolle abzulegen. Da am 20. 6. weder Copula noch Eiablage beobachtet werden konnte, wurde das zur Kultur 1 benützte Männchen vom 18. 6. noch hinzugesetzt. Abends am 20. 6. scheint das ♂ 9. 6. zu copulieren. Am 21. 6. fand sich ein leidlich normales Gelege, welches zum Teil auf dem Flügel des alten Männchens abgesetzt war, dem im Laufe des Tages noch ein weiterer kleiner Eihaufen folgte. Das Weibchen blieb noch bis zum 24 Juni am Leben, ohne weitere Eier abzulegen.

Infolge der abnormen Wärme im März schlüpften 87 Raupen aus, von denen 14 zum Fütterungsversuch verwandt wurden, jedoch nur 2 heranwuchsen, so daß sie zur Geschlechtsbestimmung verwandt werden konnten; eines davon war ein Weibchen, das andere ein Männchen. Nach der Kälteeinwirkung schlüpften am 9.—15. Mai noch Raupen aus, gingen aber, ohne zu fressen, zu Grunde. Das Gelege wurde nicht auf zurückgebliebene Eier untersucht.

Kultur 3. Ein am 12. Juni geschlüpftes Weibchen wurde mit einem Männchen, das zwischen dem 18. und 20. Juni geschlüpft war, am 20. 6. zusammengebracht. Es hat am 26. Juni ein kleines gut geglättetes Gelege geliefert, legte keine weiteren Eier ab, obwohl es bis zum 2. Juli noch am Leben blieb. Im März schlüpften 4 Raupen aus, von denen zwei sich füttern ließen, sie ergaben Männchen. Der Rest des Eimaterials, durch Abkühlung am weiteren Ausschlüpfen verhindert, ergab, aufs Neue in die Wärme zurückgebracht, nur wenige Raupen, die, ohne zu fressen, zu Grunde gingen. Im Gelege fanden sich wenige zurückgehaltene Raupen vor. Viele Raupen hatten die Eischalen nicht verlassen.

Kultur 4. Weibchen ebenfalls vom 12. 6., Männchen vom 20. 6., Vereinigung am 21. 6., normale Eiablage 21. 6. Das Weibchen lebt noch bis zum 2. Juli. Im März schlüpften 40 Raupen aus, von denen nur 1 bis zur Geschlechtsreife sich aufziehen ließ, 1 ♂. Im Mai schlüpften noch 160 Raupen aus. Von ihnen wurden 50 zur Verpuppungskultur verwandt, sie lieferten 33 ♀ 12 ♂ Schmetterlinge. Von den übrigen 110 Raupen wurde ein Teil sehr früh abgetötet, 93 auf ihr Geschlecht untersucht: 62 ♀ 31 ♂. Im Gelege fanden sich 2 zurückgehaltene geschlüpfte Raupen und 20—30 Eier, aus denen die Raupen nicht ausgekrochen waren, keine bräunlichen (unentwickelten) Eier.

Kultur 5. Weibchen ebenfalls vom 12. 6., Männchen vom 20. 6., Vereinigung am 21. 6. Gelege schön geglättet vom 21. 6., Weibchen bleibt bis zum 2. Juli leben. Im März schlüpfen 25 Raupen aus, die sämtlich absterben. Im Mai entwickeln sich wenige Raupen, die, ohne zu fressen, absterben. Im Gelege sind einige Raupen zurückgehalten. Mindestens die Hälfte der Eier ist nicht geschlüpft, manche scheinen sich nicht entwickelt zu haben.

Kultur 6. Weibchen vom 11. Juni mit einem Männchen wahrscheinlich vom 21. 6. (vielleicht auch 1—2 Tage früher) am 21. 6. zusammengegeben, scheinen um 3 Uhr zu kopulieren, sind aber um 4 Uhr wieder auseinander. Das Weibchen wandert im Zuchtglas herum und setzt 7 Uhr abends einige verzettelte Eier ab. Am 22. 6. setzt das Weibchen Wolle ohne Eier ab, sitzt nachmittags 4 Uhr in Kopulastellung mit dem Männchen, hat in der Nacht zum 24. 6. einen kleinen ziemlich normal aussehenden Eihaufen abgesetzt. Verfrüht schlüpfen 4 Räupchen aus, von denen 1 beim Auskriechen, 3 andere bald darauf absterben. Nach der Kältebewirkung kriecht im Mai keine weitere Raupe aus. Im Gelege nur wenige leere Eischalen. Viele Eier sind bräunlich, scheinen sich nicht entwickelt zu haben.

Kultur 7. Schmetterlinge wie in Kultur 6 (♀ 11. 6., ♂ 21. 6. vielleicht auch früher 18. 6.—20. 6). Kopula wurde nicht beobachtet. Am 22. 6. hat das Weibchen ein normales Gelege gebildet, welches es im Laufe des 23. 6. verlängert. Am 24. 6. hat es einen weiteren kleinen Eihaufen gebildet. Im März kriechen 3 Räupchen aus, sterben aber beim Auskriechen ab. Im Mai, nach der Kältebewirkung, schlupfen viele Räupchen aus, sterben aber ab, ohne den Versuch zum Fressen zu machen.

Kultur 8. 2 Weibchen, frisch geschlüpft am 21. 6., wurden mit 3 Männchen vom 12. 6. am 21. 6. zusammengegeben. Trotzdem die Männchen 9 Tage alt sind, sind sie sehr lebhaft und sammeln sich am 22. 6. um ein etwas verkrüppeltes ♀. Am 23. 6. haben beide Weibchen normale Eihaufen abgesetzt. Männchen leben noch am 23. 6.

Kultur 8a. Kleiner Eihaufen. Im März kriechen 5 Räupchen aus, welche bald absterben. Im Mai folgen sehr viele nach, werden nicht weiter gezüchtet.

Kultur 8b. Großes Gelege. Im März kriechen 68 Tiere aus, von denen 58 getötet wurden, 10 zur Aufzucht bestimmte bald abstarben. Von den zahlreichen im Mai ausschlüpfenden Raupen wurden 50 Tiere in Sonderkultur, 50 weitere in einer Reservekultur gezüchtet. Von der Sonderkultur wurden 16 als Raupen zur Geschlechtsbestimmung verwandt; sie waren sämtlich weiblichen Geschlechts, von dem zur Verpuppung gelangten Rest waren 21 ♀, 7 ♂. Im Ganzen war also das Geschlechtsverhältnis 37 ♀ : 7 ♂. Das Geschlechtsverhältnis der Reservekultur wurde auf dem Raupenstadium bestimmt; es ergab: 23 ♀ : 8 ♂. Das Gesamtresultat war somit 60 ♀ : 15 ♂. Im Gelege fanden sich etwa $^1/_4$—$^1/_3$ Eier nicht geschlüpft, enthielten aber Räupchen.

Kultur 9. 2 Weibchen, welche wie in Kultur 8 frisch am 21. Juni geschlüpft waren, wurden am 21. 6. mit 3 Männchen vom 9. 6. zusammengegeben. Die Männchen waren trotz ihrer Überreife

sehr lebhaft. Am 22. Juni waren die Männchen sehr abgeflattert und saßen von den Weibchen getrennt; am 23. 6. waren 2 Männchen tot, das dritte Männchen noch so lebhaft, daß es fort flog und wieder eingefangen werden mußte. Das beste der in Kultur 8 verwandten Männchen (vom 11. 6. stammend) wird der Kultur 9 neu hinzugesetzt. 24. 6. ein Männchen zwischen den beiden Weibchen in Copulastellung beobachtet. Beide Weibchen liefern normale Gelege. Im März waren aus dem Gelege 9a 21 Tiere ausgeschlüpft, von denen 11 abgetötet, 10 mit Futter versehen wurden. Letztere starben gleichwohl ab. Im Mai kamen dann noch cca 20 Räupchen aus, die aber zu schwach waren, um das Gelege zu verlassen und ohne zu fressen abstarben. Gelege 9b lieferte im März 9 Tiere, die aber rasch abstarben, im Mai dagegen eine enorme Masse, von der die meisten Räupchen abgetötet wurden. Die zur Aufzucht verwandten Tiere wurden als halbwüchsige Raupen getötet und untersucht. Es waren 30 ♀, 17 ♂.

Kultur 10. Ein Weibchen vom 11. Juni wird am 22. Juni mit 2 Männchen zusammengesetzt, von denen das eine Tags zuvor geschlüpft war, das andere etwas früher. Da keine Kopula eintrat, wurde am 24. 6. ein neues frisches Männchen zugesetzt. Nachdem in den vorhergehenden Tagen schon isolierte Eier abgesetzt worden waren, wurde am 25. 6. ein scheinbar normaler Cocon gebildet, aus dem weder im März noch Mai Raupen hervorgingen.

Kultur 11. Vier Weibchen vom 12. 6. wurden mit 2 Männchen vom 19. 6. und 24. 6. zusammengebracht. Eine Copula wurde nicht beobachtet. Doch legte ein Weibchen als 11a bezeichnet am 25. 6. ein normal aussehendes Gelege ab. Am 8. März schlüpften 10 Räupchen aus, von denen 5 frühzeitig abstarben, 5 bis zur Geschlechtsbestimmung aufgezogen werden konnten; es waren 3 ♀, 2 ♂. Die im Mai ausschlüpfenden zahlreichen Raupen wurden aus Mangel an Zuchtbehältern nicht aufgezogen. Im Gelege waren alle Eier geschlüpft.

Ein zweites Weibchen 11b hat am 25. 6. ein kleines Eihäufchen abgelegt, am 26. 6. ein leidlich normal aussehendes Gelege geliefert. Aus beiden Eierhaufen schlüpften keine Raupen aus, weder im März noch im Mai. Ebenso lieferten die beiden anderen Weibchen keine Nachkommenschaft, wenn sie auch am 28. 6. — 30. 6. unregelmäßig abgesetzte Eihaufen lieferten.

Kultur 12. Drei Weibchen vom 16. 6. werden mit einem Männchen vom 23. 6. am 24. 6. vereint. Am 25. 6. abends 10 Uhr wurde ein Weibchen 12a in Copula mit dem Männchen gesehen. Von ihm stammt wahrscheinlich ein sehr kleiner, aber gut aussehender Eierhaufen vom 26. 6., wahrscheinlich auch ein gut aussehendes Gelege vom 27. 6. früh, außerdem am Abend noch weitere Eihaufen. Im März schlüpften keine Raupen aus, zahlreiche dagegen im Mai; letztere waren jedoch unfähig, zu fressen und starben bald ab. Die

meisten Eier waren nicht geschlüpft. Von den beiden übrigen Weibchen legte eines in den folgenden Tagen bis zum 1. Juli noch weitere kleine Eihaufen, aus denen aber später keine Raupen hervorgingen. Das dritte Weibchen ging ohne Eier geliefert zu haben zu Grunde.

Kultur 13. Drei Weibchen vom 17. 6. werden mit einem Männchen vom 23. 6. am 24. 6. zusammengebracht. Ein Weibchen (13a) wurde schon am Nachmittag 3 Uhr in Copulastellung beobachtet, welche bis zum Abend andauerte. Tags darauf lieferte es ein gut aussehendes Gelege. Aus ihm gingen im März 4 Räupchen hervor, welche sich nicht aufziehen ließen, im Mai große Mengen, welche aber nicht in Kultur genommen wurden.

Zu den beiden anderen Weibchen wurden am 25. 6. zwei Männchen hinzugesetzt, deren Alter nicht bestimmt worden war; sie lieferten zwei schöne Gelege (13b und 13c). Aus dem Gelege 13b schlüpften im März 4 Tiere aus, von denen jedoch nur 1 am Leben blieb, bis es untersucht werden konnte; es erwies sich als Männchen. Im Mai lieferte das Gelege viele Raupen, von denen jedoch nur 30 aufgezogen wurden; es waren 13 Männchen und 17 Weibchen. Im Gelege fanden sich etwa 50 % nicht geschlüpfte Eier.

Von dem Gelege des Weibchens 12c schlüpften nur im Mai Raupen aus in großer Menge. Von den zur Geschlechtsbestimmung benutzten Tieren waren 22 Männchen, 33 Weibchen. Im Gelege keine nicht geschlüpften Eier.

Kultur 14. Fünf Weibchen vom 18. 6. hatten bis zum 24. 6. sehr viel Wolle abgesetzt und wurden an diesem Tage mit 2 Männchen, die in der Zeit vom 18. 6.—20. 6. ausgeschlüpft waren, zusammengebracht. Ein Männchen scheint abends den Versuch zu machen, zu kopulieren. Da am 25. 6. keine Gelege gebildet waren, die Kultur aber mit Wolle stark verunreinigt war, wurden zwei Weibchen mit zwei Männchen neu installiert. Am 26. 6. liefert eines der beiden Weibchen ein gut aussehendes Gelege, das zweite einen Eihaufen. Aus ersterem schlüpften im März 4 Raupen aus, von denen 1 sich auffüttern ließ, es war ein Männchen. Im Mai lieferte das Gelege noch viele Raupen, die auch Versuche machten, zu fressen, aber sehr frühzeitig abstarben. Von den übrigen Weibchen wurde keine Nachkommenschaft erzielt.

Kultur 15. Zwei Weibchen vom 19. 6. wurden am 24. 6. mit einem am 18. 6. geschlüpften Männchen zusammengebracht. Weibchen 15a wird nachmittags 3 Uhr in Copula beobachtet. Copula ist um 6 Uhr auseinander gegangen. Am 25. 6. fanden sich zwei normal aussehende Gelege vor, von denen das zweite offenbar erst in Bildung begriffen war (15b). Eiablage geht am 26. 6. weiter vor sich: ein größeres (wahrscheinlich b) und ein kleineres Eihäufchen. Auch am 27. 6. wurden noch einige Eier abgelegt. Am 8. März schlüpften 17 Räupchen von Kultur a, 4 von Kultur b aus, von denen 7 beim

Auskriechen abstarben, 12 weitere in den folgenden Tagen zu Grunde gingen, so daß nur 2 Raupen auf ihr Geschlecht geprüft werden konnten: 1 ♂, 1 ♀. Von der Kultur 15b krochen am 15. Mai viele Raupen aus, die auf 2 Kulturen zu je 50 verteilt wurden. Von Kultur 15a schlüpften zunächst keine Raupen aus, später am 15. Mai und den folgenden Tagen eine größere Zahl, von der jedoch viele abstarben. Die Zucht wurde nicht weiter geführt.

Von der Zucht 15b wurde die Partie I auf dem Raupenstadium abgetötet, sie lieferte 25 ♀, 10 ♂. Die zur Schmetterlingszucht verwandte Partie II lieferte an Puppen 33 ♀, 15 ♂, wobei jedoch zu bemerken ist, daß 21 weibliche Puppen nicht geschlüpft waren, weil sie zu trocken gehalten wurden. Im Gelege fanden sich ca. 50 nicht geschlüpfte Eier.

Kultur 16. Zwei Weibchen vom 20. 6. mit 1 Männchen vom gleichen Tag am 24. 6. zusammengebracht. Nachmittags 3 Uhr sucht das Männchen eines der Weibchen zu begatten, hat abends 6 Uhr noch keine Copula erzielt. Da am 25. 6. das Männchen abgeflattert und kein Gelege erzielt worden war, wurde ein neues Männchen vom 21. 6 hinzugefügt. Am 26. 6 ein tadelloses Gelege, ein zweites im Gang. Das erste Gelege liefert im März 1 Raupe (1 ♂), im Mai enorme Massen von Raupen, von denen nur ein kleiner Teil (nicht in Verpuppungskultur) aber aufgezogen wurde. Das zweite Gelege entwickelte sich auch und wurde ähnlich behandelt. Das erste Gelege lieferte 19 ♀ : 23 ♂, das zweite 13 ♀ : 7 ♂.

Kultur 17. Ein Weibchen vom 19. 6. wird mit einem Männchen vom 21. 6. am 25. 6. zusammengesetzt. Weibchen liefert ein normales Gelege. Am 8. März schlüpften 9 Raupen aus, die bald abstarben bis auf 1 Raupe, die sich als ♂ erwies. Im Mai schlüpften keine weiteren Tiere aus.

Kultur 18. Zwei Weibchen vom 19. 6. werden mit einem ♂ vom 21. 6. am 25. 6. zusammengesetzt. Abends 10 Uhr ist das Männchen mit einem ♀ in Copulastellung, desgleichen am 26. 6. früh. Nachmittags 4 Uhr befindet sich das Männchen mit dem zweiten Weibchen in Copulastellung. Da am 27. 6. keine Eiablage erfolgt ist und das Männchen abgeflattert aussieht, wird letzteres durch ein neues Männchen ersetzt, welches abends mit einem Weibchen in Copulastellung beobachtet wird. Am 28. 6. hat ein Weibchen einen ganz normalen Eierhaufen abgesetzt. Aus ihm schlüpften am 8. März zwei Räupchen aus, die abstarben. Am 8. 5. schlüpfen enorme Mengen von Raupen aus, von denen nur ein kleiner Teil als Raupenkultur gezüchtet wurde. Das Resultat war 63 ♀ : 14 ♂. Im Gelege ca. 15 nicht geschlüpfte Eier.

Kultur 19. Zwei Weibchen vom 13. 6. haben schon Eier abgelegt, sie werden am 27. 6. mit einem Männchen vom 25. 6. vereinigt. Das eine Weibchen ist kräftig und klettert am Glas in die

Höhe. Nachmittags befindet sich das Männchen mit einem Weibchen in Copulastellung. Die Prüfung am 30. 6. ergab: beide Weibchen tot, zwei sehr normal aussehende Gelege. Im März schlüpften keine jungen Tiere, im Mai viele Tiere aus 19a, keine aus 19b. Die Raupenkultur ergab 15 ♀ : 15 ♂, die Verpuppungskultur 21 ♀ : 14 ♂. Gelege 19a war fast vollkommen geschlüpft.

Kultur 20. Zwei Weibchen vom 14. 6. wurden am 28. 6. mit einem Männchen vom 25. 6. vereinigt. Die Weibchen hatten schon vorher einzelne Eier abgelegt. Nachmittags wurde das Männchen mit einem Weibchen in Copulastellung gefunden. Am 30. 6. hatten beide Weibchen schöne Gelege abgesetzt. Im März waren keine Raupen geschlüpft, im Mai enorme Mengen. Eine Verpuppungskultur wurde nicht angesetzt. Die Raupenkultur ergab 45 ♀ : 28 ♂.

Kultur 21 wurde bei 12—17° geführt. Zwei Weibchen vom 16. 6. wurden am 28. 6. mit einem Männchen vom 26. 6. vereint. Ein Weibchen hat am 30. 6. ein schönes Gelege geliefert und am 1. 7. noch einen kleineren Eihaufen. Im März krochen 13 Raupen aus, von denen nur zwei bis zur Geschlechtsbestimmung aufgezogen werden konnten; es waren Männchen. Im Mai schlüpften noch 15 Raupen aus, die, ohne zu fressen, abstarben. Im Gelege war über die Hälfte der Eier nicht geschlüpft. Das Gelege des zweiten Weibchens war unregelmäßig und lieferte keine Raupen.

B. Kulturen bei Zimmertemperatur (21—25° C.).

Kultur 21a. Zwei Weibchen am 21. 6. geschlüpft, wurden am 28. 6. mit einem Männchen unbekannten Alters vereint. Am 30. 6. wurde das Männchen in Copula-Stellung mit einem Weibchen beobachtet, doch trat bald wieder Trennung ein. Nachmittags fand sich ein größeres und ein kleineres Gelege vor. Außerdem wurde das Männchen in Copula beobachtet. Das betreffende Weibchen scheint mit Eiablage zu beginnen. Am 1. 6. findet sich ein großes Gelege vor. Im März schlüpften 27 Raupen aus, im Mai ca. 70, die aber ohne zu fressen abstarben. Von den 27 Raupen im März wurden 16 wegen Futtermangels getötet. Von übrigen entwickelten sich nur 2 weiter: 2 ♁.

Kultur 22. Zwei Weibchen ausgeschlüpft am 22. 5., von denen das eine wenig, das andere mehr Eier schon vorher abgelegt hatte, — ein drittes Weibchen derselben Zucht und desselben Alters war schon abgestorben — werden am 29. 6. mit einem Männchen unbekannten Alters zusammengesetzt. Copula wurde nicht beobachtet. Ein Weibchen wurde durch den Deckel des Zuchtglases zerquetscht, das andere hatte 30. 6. ein normal aussehendes Gelege von $^1/_3$ Größe des Gewöhnlichen gelegt, nachmittags weiter einen größeren Haufen, den es am 1. 7. verlängert. Raupen schlüpfen weder im März noch im Mai aus. Auch das Gelege enthält keine Raupen.

Kultur 23. Zwei Weibchen ausgeschlüpft am 23. 6. wurden mit einem Männchen vom 26. 6. am 28. 6. vereint. Eines von ihnen hatte viel Wolle mit wenigen Eiern abgesetzt, das andere fängt eben an. Es wurde Annäherung des Männchen an ein Weibchen beobachtet, aber keine Copula. Am 30. 6. hat ein Weibchen den Anfang eines normal aussehenden grauen Geleges gebildet. Das zweite Weibchen liefert ein bräunlich gefärbtes Gelege. Aus beiden Gelegen entwickeln sich weder im März noch im Mai Raupen. Die Eier sehen bräunlich aus und enthalten keine Raupen.

Kultur 24. Ein Weibchen vom 23. 6. wurde am 29. 6. (?) mit einem Männchen unbekannten Alters vereint, hat am 30. 6. ein normales Gelege abgesetzt. aus dem im März 28 Räupchen ausschlüpften, von denen 8 beim Auskriechen abstarben. Von den überlebenden konnten nur 2 Raupen bis zur Geschlechtsbestimmung gezüchtet werden, 1 ♀, 1 ♂. Im Mai lieferte das Gelege noch ein kümmerliches Tier, welches ohne zu fressen abstarb. Gelege enthält viele embryonierte, aber nicht geschlüpfte Eier.

Kultur 25. Ein Weibchen vom 24. 6. hatte schon vorher Eier abgelegt, wird am 29. 6. mit einem aus derselben Kultur stammenden Männchen vom 25. 6. zusammengebracht. Das Weibchen sitzt am 30. 6. auf einem normalen Gelege, das am 1. 7. weitergeführt wird. Im März schlüpften 27 Tiere aus, von denen nur 5 Tiere aufgezogen werden konnten, 2 ♀, 3 ♂. Im Mai schlüpften viele Raupen aus, von denen aber nur ein kleiner Teil zur Zucht verwandt wurde. Auf dem Raupenstadium abgetötet, ergab die Kultur 19 ♀, 10 ♂. Im Gelege fanden sich ca. $^1/_3$ nicht geschlüpfte Eier.

Kultur 26. Ein Weibchen vom 25. 6., das schon vorher einen kleinen Eihaufen abgesetzt hatte, wurde am 3. 7. mit einem am 2. 7. geschlüpften Männchen zusammengebracht, ist im übrigen sehr lebhaft. Copula wurde nicht beobachtet. Am 4. 7. mittags beginnt das Weibchen Eier abzulegen. Am 6. 7. fanden sich zwei ziemlich normale Eipakete, außerdem viele zerstreute Eier vor. Das Weibchen ist tot, hat aber noch viele Eier im Bauch. Im März wie im Mai schlüpften keine Raupen aus. Im Gelege finden sich keine entwickelten Eier.

Kultur 27. Ein Weibchen vom 26. 6., das bis dahin weder Eier noch Flocken abgesetzt hatte, wird am 3. 7. mit einem Männchen vom 3. 7. zusammengesetzt. Am 4. 7. sitzt das Männchen beim Weibchen, doch konnte keine Copula festgestellt werden. Am 5. 7. und 6. 7. wurde die Kultur nicht geprüft. Prüfung am 7. 7. ergab ein schönes Gelege. Auch waren Männchen und Weibchen noch sehr lebhaft. Im März schlüpften keine Raupen aus, im Mai große Mengen, so daß 2 Kulturen angesetzt werden konnten. Die eine auf dem Raupenstadium abgetötet ergab 36 ♀ : 28 ♂; die zur Aufzucht von Schmetterlingen dienende Kultur lieferte 25 ♀ : 21 ♂.

Kultur 28. Ein Weibchen, das weder Eier noch Flocken gebildet hatte, wurde am 3. 7. mit einem Männchen vom 26. 6. zusammengebracht. Abends keine Copula. Am 4. 7. findet sich ein leidlich normal aussehendes größeres Gelege. Im März waren keine Eier ausgekommen, im Mai enorme Mengen. Die für die Schmetterlingsaufzucht bestimmte Kultur ergab 16 Weibchen, von denen 5 nicht aus der Puppe geschlüpft waren, und 26 ♂. Die Raupenkultur war enorm reduziert worden. Die zur Untersuchung verwandten Raupen lieferten das Geschlechtsverhältnis 4 ♀ : 5 ♂.

Kultur 29. Ein Weibchen vom 29. 6., das bis dahin weder Eier noch Wolle abgelegt hatte, wurde am 3. 7. mit einem Männchen vom 25. 6. vereinigt. Am Abend weder Copula noch Eiablage. Am 4. 7. sitzt das Weibchen auf einem guten, bis zum 5. 7. etwas ruppig fortgeführten Gelege. Im März waren keine Raupen ausgeschlüpft, im Mai enorme Mengen. Die Raupenkultur ergab 11 ♀ : 17 ♂, die Verpuppungskultur nach den Puppen bestimmt 21 ♀ : 25 ♂.

Kultur 30 I. Ein Weibchen vom 29. 6. wurde am 11. 7. mit einem Männchen der gleichen Kultur vom 3. 7. (Inzucht) zusammengebracht. Anfänglich trat keine Eiablage ein. Als am 14. 7. die Kultur neuerdings kontrolliert wurde, fand sich ein nicht gut aussehendes Gelege, das somit mindestens 13 Tage, vielleicht sogar 14 Tage nach dem Ausschlüpfen des Weibchens abgelegt war. Raupen schlüpften in großen Mengen im Mai aus. Die Verpuppungskultur ergab 22 ♀ : 17 ♂.

Kultur 30 II. Ein Weibchen vom 28. 6. wurde am 5. 7. mit einem Männchen vom 28. 6. zusammengebracht. Da weder Copula noch Eiablage erfolgte, wurde ein neues Männchen am 6. 7. hinzugesetzt, welches sofort kopulierte. Am 7. 7. fand sich ein tadelloses Gelege vor, aus dem im März keine, im Mai enorme Massen von Raupen ausschlüpften. Die Verpuppungskultur ergab 22 ♀ : 22 ♂ geschlüpfte Schmetterlinge.

Durch ein Versehen waren die Raupenkulturen 30 I und II. zwar getrennt geführt worden, aber bei den Abtötungen wurde nicht bemerkt, wie sich die einzelnen Befunde auf die beiden Kulturen verteilen; es handelt sich um folgende Abtötungen: 1. 9 ♀ : 9 ♂, 2. 11 ♀ : 8 ♂, 3. 6 ♀ : 10 ♂, 4. 3 ♀ : 7 ♂, 5. 8 ♀, 3 ♂, 6. 6 ♀ : 4 ♂, 7. 14 ♀ : 8 ♂. Im Ganzen also 57 ♀, 49 ♂.

Zwei Kulturen, Nr. 31 und 32, bei denen Weibchen vom 30. 6. am 5. 7. das eine Mal mit Männchen vom 26. 6., das zweite Mal vom 28. 6. vereinigt wurden, verliefen resultatlos.

Kultur 33. Ein Weibchen vom 1. 7 wurde am 5. 7. mit einem Männchen unbekannten Alters zusammengebracht und lieferte am 7. 7. ein etwas ruppiges Gelege, aus dem im März 5 bald absterbende Larven ausschlüpften, im Mai sehr viele. Mir stehen nur 2 Stichproben zur Verfügung, Abtötungen von Raupen. Die eine ergab 9 ♀ : 6 ♂, die andere 2 ♀ : 11 ♂, insgesamt 11 ♀ : 17 ♂.

Kulturen des Jahres 1922 nach Temperatur und Überreife gruppiert.

A. Kältekulturen-Temperatur 10—12° C. Weibliche Überreife.

Nr.	Alter des Weibchens	Alter des Männchens	Überreife	März-Raupen	Mai-Raupen	Schmetterlinge	Total	Bemerkungen
15 a	19. 6.—25. 6.	18. 6.—25. 6.	6	(18) 1 ♂, 1 ♀	sehr große Zahl, nicht kultiviert		1 ♀, 1 ♂	Normales Gelege.
15 b	19. 6.—25. 6.	18. 6.—25. 6.	6	(4)	25 ♀, 10 ♂	33 ♀, 15 ♂	58 ♀, 25 ♂	Schönes Gelege, alle Raupen bis auf 50 geschlüpft.
16 a	20. 6.—26. 6.	21. 6.—26. 6.	6	0	19 ♀, 23 ♂		19 ♀, 23 ♂	Schönes Gelege, fast alle Eier geschlüpft.
16 b	20. 6.—26. 6.	21. 6.—26. 6.	6	0	13 ♀, 7 ♂		13 ♀, 7 ♂	Schönes Gelege, fast alle Eier geschlüpft.
17	19. 6.—25. 6.	21. 6.—25. 6.	6	(9) 1 ♂	—	—	1 ♂	Normales Gelege, trotzdem keine Eier geschlüpft, die meisten embryoniert.
13	17. 6.—25. 6.	23. 6.—25. 6.	8	(4)	nicht kultiviert		—	Schönes Gelege, 30—40 Raupen nicht geschlüpft.
13 b	17. 6.—26. 6.	?	9	(4) 1 ♂	17 ♀, 13 ♂	—	17 ♀, 14 ♂	Schönes Gelege, die Hälfte der Raupen nicht geschlüpft.
13 c	17. 6.—26. 6.	?	9	0	33 ♀, 22 ♂	—	33 ♀, 22 ♂	Schönes Gelege, fast alle Eier geschlüpft.
18	19. 6.—28. 6.	?	9	(2)	63 ♀, 14 ♂	—	63 ♀, 14 ♂	Schönes Gelege, ca. 15 Raupen nicht geschlüpft.
3	12. 6.—21. 6.	18. 6.—21. 6.	9	(4) 2 ♂	Raupen fressen nicht		2 ♂	Kleines Gelege, die meisten Raupen in den Eiern zurückgehalten.
4	12. 6.—21. 6.	20. 6.—21. 6.	9	(40) 1 ♂	62 ♀, 31 ♂	33 ♀, 12 ♂	95 ♀, 44 ♂	Normales Gelege, 20—30 Raupen nicht geschlüpft.
5	12. 6.—21. 6.	20. 6.—21. 6.	9	(25)	die wenigen ausschlüpfenden Raupen fressen nicht			50% der Eier embryoniert, aber nicht geschlüpft.
1	9. 6.—19. 6.	18. 6.—19. 6.	10	(55)	25 ♀, 5 ♂	—	25 ♀, 5 ♂	Normales Gelege, 50% der Eier embryoniert, aber nicht geschlüpft.
12 a	16. 6.—26. 6.	23. 6.—26. 6.	10	0	zahlreiche Raupen gehen ohne Fressen zu Grunde			Vereinzelte Eihaufen, die meisten Eier nicht geschlüpft.
12 b	16. 6.—27. 6. (1. 7.)	23. 6.—27. 6.	11	0	0	0	—	Kleiner Eihaufen, liefert keine Raupen.
7	11. 6.—22. 6. (24. 6.)	19. 6.—22. 6.	11 (13)	(3)	zahlreiche Raupen, fressen nicht			Viele Eier nicht geschlüpft, 20 Raupen im Gelege zurückgehalten.
6	11. 6.—24. 6.	20. 6.—24. 6.	13	(4)	keine Raupen			Normales Gelege, viele nicht entwickelte Eier.

						zuchtet				
11 b c d	12. 6.—26. 6. (28. 6)	24. 6.—26. 6.	14 (16)	—	keine Raupen					Ziemlich normales Gelege.
10	11. 6.—25. 6.	24. 6.—25. 6.	14	—	keine Raupen					Ziemlich normales Gelege, bräunliche (unentwickelte) Eier.
19 a	13. 6.—28. 6.	25. 6.—28. 6.	15	—	15 ♀, 15 ♂	21 ♀, 14 ♂	36 ♀, 29 ♂			Normales Gelege, fast alle Eier geschlüpft.
19 b	13. 6.—28. 6.	25. 6.—28. 6.	15	—	keine Raupen					Normales Gelege, keine geschlüpften Eier.
20	14. 6.—29. 6.	25. 6.—29. 6.	15	—	45 ♀, 28 ♂	—	45 ♀, 28 ♂			Normales Gelege, liefert viele Raupen, alle Eier geschlüpft.
				4 ♀, 8 ♂	317 ♀, 168 ♂	87 ♀, 41 ♂	408 ♀, 217 ♂			
Kältekulturen. Männliche Überreife.										
8	21. 6.—23. 6.	12. 6.—23. 6.	11	(68)	23 ♀, 8 ♂	37 ♀, 7 ♂	60 ♀, 15 ♂			Normales Gelege, 1/4—1/3 der Eier nicht geschlüpft, aber embryoniert.
9 a	21. 6.—24. 6.	12. 6.—24. 6.	12	(21)	(20 Raupen)		—			Normales Gelege.
9 b	21. 6.—24. 6.	12. 6.—24. 6.	12	(9)	30 ♀, 17 ♂	—	30 ♀, 17 ♂			Normales Gelege, fast alle Eier geschlüpft, wenige Raupen im Gelege.
					53 ♀, 25 ♂	37 ♀, 7 ♂	90 ♀, 32 ♂			
Zimmerkulturen Temperatur 21—25° C. Weibliche Überreife.										
25	24. 6.—30. 6.	25. 6.—30. 6.	6	(37)	2 ♀, 3 ♂	19 ♀, 10 ♂	—	21 ♀, 13 ♂		Normales Gelege, 1/3 Eier nicht geschlüpft, 6 im Gelege zurückgehaltene Raupen.
22	22. 6.—29. 6	?	7	(27)	2 ♂	ca. 70 Raupen, fressen nicht		2 ♂		Über die Hälfte der Eier nicht geschlüpft.
23	23. 6.—30. 6.	26. 6.—30. 6.	7	keine Raupen		—	—			Normales Gelege, Eier nicht entwickelt.
24	23. 6.—30. 6.	?	7	(28)	1 ♀, 1 ♂	keine Raupen		1 ♀, 1 ♂		Normales Gelege, Eier embryoniert.
33	1. 7.— 7. 7.	?	6	(5)	11 ♀, 17 ♂	—	11 ♀, 17 ♂			Ruppiges Gelege, hat aber viele Raupen geliefert.
21	21. 6.—30. 6.	?	9	(27)	2 ♂	im Mai ca. 70 Raupen, fressen nicht		2 ♂		Weit über die Hälfte der Eier nicht geschlüpft.
26	25. 6.— 4. 7.	2. 7.— 4. 7.	9	weder im März noch im Mai Raupen						Leidliches Gelege, Eier nicht entwickelt.
27	26. 6.— 5 7.	3. 7.— 5. 7.	9	0	36 ♀, 28 ♂	25 ♀, 21 ♂	61 ♀, 49 ♂			
30 I	28. 6.— 7. 7.	?	9	0	57 ♀, 49 ♂	22 ♀, 22 ♂	101 ♀, 88 ♂			Schönes Gelege.
30 II	28. 6.—12. 7.	3. 7.—12. 7.	13	0		22 ♀, 17 ♂				Schlecht aussehendes Gelege.
				3 ♀, 8 ♂	127 ♀, 109 ♂	85 ♀, 86 ♂	195 ♀, 172 ♂			
Männliche Überreife.										
28	28. 6.— 4. 7.	26. 6.— 4. 7.	6	0	4 ♀, 5 ♂	16 ♀, 26 ♂	20 ♀, 31 ♂			
29	29. 6.— 4. 7.	25. 6.— 4. 7.	9	0	11 ♀, 17 ♂	21 ♀, 25 ♂	32 ♀, 42 ♂			Gelege normal begonnen, später ruppig.
							147 ♀, 245 ♂			

Beurteilung der Ergebnisse.

In der vorausstehenden tabellarischen Übersicht sind Kältekulturen (1—20) und Zimmerkulturen (21—33) aufgeführt. In jeder der beiden Gruppen gibt es verschiedene Grade der Überreife. Diese sind in den Kältekulturen von 6—16 Tagen, in den Zimmerkulturen von 5—13 Tagen abgestuft. Im allgemeinen beziehen sich die Angaben auf Überreife des Weibchens bei nahezu normaler Reife des Männchens. Eine Ausnahme machen die Kulturen 8 und 9, bei denen die Weibchen nahezu normal, die Männchen dagegen überreif waren, bei 8 11 Tage, bei 9 sogar 12 Tage, eine weitere Ausnahme macht Kultur 1, bei welcher sowohl Männchen wie Weibchen 11 Tage überreif waren.

Wie nicht anders zu erwarten war nimmt mit dem Grad der Überreife die Aussicht auf Entwicklungsmöglichkeit ab. Dabei ergeben sich verschiedene Abstufungen. Auf der einen Seite haben wir normale Entwicklungsmöglichkeit, bei der nahezu alle Eier vom Weibchen abgelegt werden und sich normal entwickeln, auf der anderen Seite völlige Unfruchtbarkeit, bei der nicht nur keine Eier ausschlüpfen, sondern vermöge der bräunlichen Farbe ihres Inhalts es wahrscheinlicher ist, daß sie unbefruchtet oder wenigstens auf frühen Stadien der Entwicklung stehen geblieben sind. Dazwischen gibt es alle Übergänge: 1. ein größerer oder geringerer Teil der Raupen ist zu schwach, um die Eischalen zu sprengen und das Gelege zu verlassen, 2. die Räupchen arbeiten sich zwar aus dem Gelege hervor, vermögen aber nicht zu fressen, selbst wenn man ihnen sehr günstiges Futter, die jungen Triebe von Weißdorn, als Futter anbietet. Dabei stellte sich die Merkwürdigkeit heraus, daß mehrfach die im März, also verfrüht ausgeschlüpften Tiere trotz der Ungunst des um diese Zeit gebotenen Futters günstigere Entwicklungsbedingungen ergaben als die im Mai angesetzten Kulturen. Manche Gelege, die im Mai völlig versagten, lieferten im März noch entwicklungsfähige Raupen. So konnten bei den Gelegen 2, 3, 14, 17, 21, 24 wenigstens ein geringer Prozentsatz auf sein Geschlecht bestimmt werden, während im Mai die entsprechenden Raupen entweder gar nicht ausschlüpften oder kein Futter aufnahmen. Merkwürdig ist ferner, daß wenn wir das im März für Geschlechtsbestimmung gewonnene, aller-

dings sehr spärliche Material überblicken, das Prozentverhältnis der Männchen ein viel günstigeres ist als das der Weibchen, insgesamt: 19 ♂ zu 8 ♀. Dieselben gehörten fast sämtlich den Kältekulturen an, während für das Maimaterial der Kältekulturen sich das Sexualverhältnis 142 ♂ : 322 ♀ ergab. Der Unterschied ist wohl nur so zu erklären, daß die männlichen Raupen leichter zum Ausschlüpfen aus den Eiern veranlaßt werden.

In der Art, wie die einzelnen Schmetterlinge auf Überreife reagieren, ergeben sich große Unterschiede, insofern manche Pärchen bei hochgradiger Überreife noch gute entwicklungsfähige Gelege lieferten, während andere schon bei relativ geringer Überreife versagten. Beispiele sind Kultur 1 und 14. In beiden Fällen waren Männchen und Weibchen überreif, bei 1 um 10 Tage, bei 14 nur um 8 Tage. Letztere Kultur lieferte zwar Raupen, die aber entwicklungsunfähig waren; erstere ergab dagegen gute Zuchtresultate. Freilich zeigte das Weibchen von Kultur 14 gleich von Anfang ein ungünstiges Verhalten, indem es, was immer ein schlechtes Zeichen ist, frühzeitig angefangen hatte, Wolle abzulegen. Noch größere Unterschiede zeigen die Zimmerkulturen. Die Kulturen 22, 23, 24 waren nur 7 Tage überreif, ergaben ganz normal aussehende Gelege; für Kultur 24 stand sogar die Befruchtung außer Zweifel, da die Eier embryoniert und zum Teil sogar ausgeschlüpft waren. Gleichwohl war es nicht möglich, von ihnen entwicklungsfähige Raupen zu erzielen. Dagegen lieferte Kultur 30 sehr günstige Resultate, ein gut aussehendes Gelege, aus dem große Mengen von entwicklungsfähigen Raupen ausschlüpften, obwohl die Eier hier mindestens 13 Tage überreif waren. Kultur 30 war dabei eine Inzuchtkultur; Männchen und Weibchen stammten aus demselben Gelege. Noch merkwürdiger ist das Verhalten der Parallelkulturen 9, ein Beispiel von männlicher Überreife. Beide Weibchen stammten aus demselben Gelege und waren normal reif; die zugesetzten Männchen waren das eine 13, das andere 15 Tage überreif, als die Weibchen ihre durchaus normalen Gelege bildeten. Beide Gelege waren auch befruchtet, was daraus hervorgeht, daß sich in ihnen Raupen entwickelten. Das eine ergab sehr günstige Resultate, das andere erwies sich zur Aufzucht unbrauchbar. Die Wahrscheinlichkeit spricht dafür, daß beide Weibchen von demselben Männchen begattet wurden.

Doch ist nicht ausgeschlossen, daß das Weibchen, welches das unbrauchbare Gelege geliefert hatte, von dem stärker überreifen Männchen begattet worden war.

A. Kältekulturen.

1. Weibliche Überreife.

Nr. 16	6 Tage	32 ♀,	30 ♂
„ 15b	7 „	58 ♀,	25 ♂
„ 4	9 „	95 ♀,	43 ♂
„ 13b	9 „	17 ♀,	13 ♂
„ 13c	9 „	33 ♀,	22 ♂
„ 1	10 „	25 ♀,	5 ♂
Insgesamt		260 ♀,	138 ♂

2. Männliche Überreife.

Nr. 8b	11 Tage	60 ♀,	15 ♂
„ 9b	13 „	30 ♀,	17 ♂
		90 ♀,	32 ♂
Überreife ♂		90 ♀,	32 ♂
Überreife ♀		260 ♀,	138 ♂
		350 ♀,	170 ♂

B. Zimmerkulturen.

3. Weibliche Überreife.

Nr. 25	6 Tage	21 ♀,	13 ♂
„ 33	6 „	11 ♀,	17 ♂
„ 27	9 „	61 ♀,	49 ♂
„ 30 I	9 „	22 ♀,	22 ♂
„ 30 II	13 „	22 ♀,	17 ♂

4. Männliche Überreife.

Nr. 28	8 Tage	20 ♀,	31 ♂
„ 29	9 „	32 ♀,	42 ♂
Überreife ♂		52 ♀,	73 ♂
Überreife ♀		137 ♀,	118 ♂
		189 ♀,	191 ♂

In der voranstehenden Übersicht sind die Ergebnisse der Raupenkulturen 30a und 30b nicht aufgenommen, weil sich nachträglich nicht mehr feststellen ließ, wie sie sich auf die Kulturen verteilen. In ihrer Gesamtheit ergaben sie 57 ♀, 49 ♂. Es liegt kein Grund vor, sie von der Endsumme der im Zimmer gehaltenen Überreifekulturen auszuschließen. Zählt man sie dazu, so würde man die Zahl 246 ♀ : 240 ♂ erhalten, also abermals ein ganz normales Geschlechtsverhältnis. Höchstens könnte man insofern an eine Veränderung des Sexualitätsverhältnisses denken, als bei geringeren Graden der Überreife (Nr. 28 und 33) die Männchen überwiegen, bei höheren Graden (Nr. 27, 30 I, 30 II) die Weibchen. Aber die Unterschiede sind nicht sehr ausgesprochen, zumal, wenn man bedenkt, daß es sich in allen Kulturen nicht um große Zahlen handelt. Außerdem macht auch die Kultur 25 eine Ausnahme; indem trotz geringer Überreife die Weibchen die Männchen an Zahl übertreffen.

Dagegen fällt ein anderer Unterschied in den Kulturen sehr in die Augen, das ist der Unterschied zwischen den Wärme- und Kältekulturen. Addiert man sämtliche Wärmekulturen einschließlich der männlichen Uberreifekulturen (Nr. 29), so erhält man

247 ♀, 245 ♂, also fast genau das Verhältnis 1 : 1. Ganz anders verhalten sich die Kältekulturen. Addiert man hier alle von mir erzielten Zahlen, so stehen 498 ♀ 249 ♂ gegenüber, somit ein Verhältnis von 2 : 1, was aus folgenden weiteren Gesichtspunkten noch mehr Beachtung verdient. Die in Betracht kommenden Zahlen sind sehr bedeutend. Ferner herrscht eine auffallende Proportionalität zwischen den Raupen und den Schmetterlingen einer und derselben Kultur. Ich verweise in dieser Hinsicht besonders auf die Kulturen 4, 15 b; auch Kultur 8 wäre hier zu nennen, bei der männliche Überreife vorliegt. In allen diesen Fällen ist die Zahl der Weibchen erheblich über die Norm gesteigert.

Für die Ansicht, daß Züchtung bei niederen Temperaturen die Entwicklung des weiblichen Geschlechts begünstigt, hat sich auch Seiler auf Grund seiner Untersuchungen an *Psychiden* ausgesprochen. Er fand bei diesen im weiblichen Geschlecht heterozygoten Schmetterlingen infolge von Kälteeinwirkung das Geschlechtschromosom häufiger als unter gewöhnlichen Verhältnissen in den Richtungskörper übergewandert, was zur Folge hat, daß Weibcheneier entstehen. Er bringt somit die Geschlechtsumstimmung mit den Reifeteilungen in Zusammenhang. Ob das richtig ist, lasse ich zunächst unentschieden. Die Deutung würde es nicht erklären, daß auch dann, wenn die Männchen vor der Begattung niederen Temperaturen und Überreife ausgesetzt werden, eine Zunahme der Weibchen eintritt, wie die Kulturen 8 und 9 b, namentlich die erstere, erkennen lassen. Mir sind überhaupt Bedenken gekommen, ob nicht die Bewirkungen, die wir zur Erklärung meiner Züchtungsresultate heranziehen müssen, komplizierterer Natur sind. Ich mache diesen Einwand mit Rücksicht auf die Züchtungsresultate, welche ich im Laufe des verflossenen Sommers erzielt habe, auf deren Mitteilung ich noch kurz eingehe.

Kulturen im Jahre 1922 angesetzt und im Jahre 1923 abgeschlossen.

Das im Jahre 1922 erzüchtete Material an Schmetterlingen habe ich im Sommer 1922 noch einmal zu Überreifekulturen benutzt. Für die Kältekulturen wandte ich abermals eine nahezu konstante Temperatur von 10—12° C. an. Die Zimmertemperatur variierte, betrug im Durchschnitt 21° C. und war somit im all-

gemeinen niedriger als im Jahre zuvor. Die erzielten Gelege waren zunächst im Zimmer aufbewahrt worden, was zur Folge hatte, daß schon im Januar einige Raupen zu schlüpfen begannen. Es handelte sich nur um wenige Individuen der Kulturen 6 b (12 Tiere), 2 a (3 Tiere), 33 (4 Tiere). Ein weiteres Umsichgreifen des Übelstandes konnte durch Übertragung des Materials in den Eisschrank vermieden werden. Da das Frühjahr sehr milde war und die Weißdornhecken anfingen, auszuschlagen, schnitt ich am 15. März aus den Gelegen 1, 5, 6, 7 (männliche Überreife), 23, 29, 30, 32, 33, 36, 38, 39, 40, 41 (weibliche Überreife) und den Normalkulturen 16 und 17 kleine Stücke heraus, brachte sie in Zimmertemperatur und veranlaßte so das Ausschlüpfen der Raupen. Von diesen lieferten die Kulturen 1, 30, 32, 38, 40, 41 keine Raupen, was aber nicht auffällig ist, da die betreffenden Gelege auch später erfolglos waren. Die Hauptmasse des Gelegematerials wurde zunächst in der Kälte belassen und erst am 23. April in das Zimmer überführt.

Die Frühkulturen wurden sämtlich auf dem Raupenstadium am 24. April abgetötet. Die Ende April angesetzten Kulturen mußten, so weit sie sich als entwicklungsfähig erwiesen, was bei einem großen Teil nicht zutraf, mit Rücksicht auf ihre meist enorme Individuenzahl (in einem Fall nahezu 500 Raupen aus einem Gelege) stark reduziert werden bis zu $^1/_4$ des ursprünglichen Bestandes, in einigen Fällen sogar in noch höherem Maße. Die Reduktion erfolgte nicht gleich von Anfang an, sondern erst, nachdem die Raupen eine Zeit lang gefressen und so ihre Entwicklungsfähigkeit bewiesen hatten. Auch bei der Geschlechtsbestimmung wurden die Raupen nicht gleich sämtlich abgetötet, sondern in Zwischenräumen in demselben Maße, als das Nahrungsbedürfnis der Raupen und die Knappheit des Futters es nötig machten. Ein Unterschied zu den vorjährigen Kulturen bestand ferner darin, daß nicht gleich von Anfang 2 Partien einer Kultur getrennt behandelt wurden: eine, welche sukzessive auf dem Raupenstadium abgetötet, und eine zweite von 50 Individuen, welche bis zur Verpuppung und zum Ausschlüpfen der Schmetterlinge fortgeführt wurde. Vielmehr wurde eine einheitliche Kultur angesetzt, aus der in größeren oder geringeren Abständen Raupen abgetötet wurden bis auf einen Rest, der dann zum Züchten von Schmetter-

lingen diente. Dieses vereinfachte Verfahren wurde angewandt, um bei der großen Zahl der angesetzten Kulturen die Zuchten nicht auf zu viele Behälter zu verteilen. Sonst ist die im Vorjahr benutzte Methode vorzuziehen; sie erlaubt die Zuchtresultate der Raupen- und der Schmetterlingskulturen besser miteinander zu vergleichen, da bei frühzeitiger Halbierung der Raupenmasse die beiden so gewonnenen Zuchten ein gleichförmigeres Material darstellen, als wenn die Schmetterlingszucht aus dem Rest des Raupenmaterials stammt. Um der zu befürchtenden Ungleichmäßigkeit möglichst vorzubeugen, bin ich bemüht gewesen, beim Abtöten der Raupen jegliche Selektion zu vermeiden. Ich trug Sorge, daß bei jeder Abtötung alle Größen vertreten waren; nur die allerkleinsten Raupen, welche bei der Geschlechtsbestimmung Schwierigkeiten gemacht haben würden, wurden zunächst geschont. Die Zahl derartiger Spätlinge in der Entwicklung war aber eine so geringe, daß die Resultate der Geschlechtsbestimmung dadurch nicht getrübt werden konnten.

Trotzdem Selektion nach Möglichkeit vermieden wurde, ließ es sich bei der geringen Anzahl der zum Abtöten herausgenommenen Tiere (10—30) nicht erzielen, daß das für die Gesamtkultur geltende Sexualverhältnis in jeder Abtötung auch nur annähernd gleich war. Vielmehr stellten sich, wie die folgende Zusammenstellung ergibt, ganz gewaltige Schwankungen heraus, ein Zeichen, welchen geringen Wert kleine Stichproben für Bestimmungen des Sexualverhältnisses haben.

Verteilung der Geschlechter auf die Einzelabtötungen der Gelege.

2a.	25. 7.	7 ♀,	5 ♂	2b.	8. 6.	10 ♀,	10 ♂	3a. 3. 6. 17 ♀, 13 ♂
	8. 6.	14 ♀,	6 ♂		11. 6.	7 ♀,	8 ♂	7. 6. 15 ♀, 15 ♂
	9. 6.	14 ♀,	9 ♂	G	12. 6.	4 ♀,	1 ♂	G 12. 6. 1 ♀, 5 ♂
		35 ♀,	20 ♂			21 ♀,	19 ♂	33 ♀, 33 ♂
	5. 3. 6.	6 ♀,	13 ♂		7. 3. 6.	15 ♀,	15 ♂	12. 28. 5. 12 ♀, 8 ♂
	9. 6.	20 ♀,	13 ♂		1. 6.	12 ♀,	9 ♂	25. 6. 4 ♀, 9 ♂
	10. 6.	9 ♀,	1 ♂		8. 6.	10 ♀,	11 ♂	9. 6. 19 ♀, 11 ♂
G	11. 6.	1 ♀,	5 ♂		9. 6.	21 ♀,	12 ♂	35 ♀, 28 ♂
G		8 ♀,	6 ♂	G	11. 6.	3 ♀,	5 ♂	
		44 ♀,	38 ♂			61 ♀,	52 ♂	
	16. 3. 6.	17 ♀,	13 ♂		17. 28. 5.	8 ♀,	4 ♂	22. 27. 5. 8 ♀, 21 ♂
	7. 6.	11 ♀,	8 ♂		12. 6.	6 ♀,	5 ♂	1. 6. 14 ♀, 7 ♂
	12. 6.	8 ♀,	7 ♂		28. 6.	11 ♀,	4 ♂	9. 6. 11 ♀, 7 ♂
		36 ♀,	28 ♂		20. 6.	4 ♀,	7 ♂	G 11. 6. 2 ♀, 1 ♂
						29 ♀,	20 ♂	14. 6. 12 ♀, 13 ♂
								20. 6. 8 ♀, 3 ♂
								56 ♀, 52 ♂

25.	1. 6.	7 ♀,	22 ♂	29.	1. 6.	9 ♀,	11 ♂	31. 3. 6.	11 ♀,	19 ♂
	7. 6.	16 ♀,	15 ♂		7. 6.	12 ♀,	9 ♂	8. 6.	11 ♀,	10 ♂
G	7. 6.	20 ♀,	1 ♂	G	3 ♂,		1 ♂		22 ♀,	29 ♂
„	12. 6.	24 ♀,	6 ♂		24 ♀,		21 ♂			
	14. 6.	4 ♀,	6 ♂							
	20. 6.	17 ♀,	3 ♂							
		88 ♀,	53 ♂							

33.	27. 5.	4 ♀,	17 ♂	36a.	27. 5.	6 ♀,	4 ♂	39. 9. 6.	13 ♀,	7 ♂
	9. 6.	21 ♀,	9 ♂		28. 5.	21 ♀,	8 ♂	18. 6.	11 ♀,	9 ♂
	14. 6.	13 ♀,	7 ♂		1. 6.	16 ♀,	5 ♂	18. 6.	9 ♀,	1 ♂
G	12 ♀,		4 ♂	G	7. 6.	7 ♀,	7 ♂	20. 6.	10 ♀,	12 ♂
	50 ♀,		37 ♂		9. 6.	10 ♀,	10 ♂	20. 6.	14 ♀,	7 ♂
					11. 6.	4 ♀,	6 ♂		57 ♀,	46 ♂
					12. 6.	4 ♀,	4 ♂			
				G	18. 6.	11 ♀,	22 ♂			
				G	18. 6.		13 ♂			
						79 ♀,	79 ♂			

Der Buchstabe G bezeichnet die Raupen, welche nachträglich aus dem Gelege geschlüpft sind, nachdem die Hauptmasse schon die Eischalen verlassen hatte.

In manchen Kulturen überwogen in den ersten Abtötungen die Weibchen, in anderen die Männchen. Addiert man einerseits die ersten, andererseits die letzten Abtötungen sämtlicher Kulturen, so erhält man für jede der beiden Summen ungefähr das gleiche Sexualverhältnis. Immerhin ist es möglich, daß die Männchen früher die Eischalen verlassen als die Weibchen. Ich habe darauf bei den ein Jahr früher gezüchteten Kulturen aufmerksam gemacht, bei denen unter den im März verfrüht ausgekrochenen Raupen die Männchen überwogen. Für die diesjährig absichtlich erzüchteten Märzzuchten stimmt das Gesagte nicht; diese waren aber auch unter ganz anderen Bedingungen entstanden. Es war ein aus dem ganzen Gelege herausgeschnittener Teil, der restlos zum Ausschlüpfen veranlaßt wurde, so daß rascher und langsamer sich entwickelnde Formen gleichmäßig zur Geschlechtsuntersuchung gelangten. Zwar ergab das Märzmaterial im großen und ganzen relativ mehr Männchen als die für die spätere Aufzucht verwandten Teile der Gelege. Aber der Unterschied ist zu geringfügig, als daß man auf ihn größeren Wert legen sollte. Auch zwischen vorderem und hinterem Ende eines Geleges konnte ich bei getrennter Aufzucht beider keine erheblicheren Unterschiede feststellen.

Anders steht es mit Unterschieden, die sich im zeitlichen Ausschlüpfen der weiblichen und männlichen Schmetterlinge ergeben. Diese sind sehr auffällig. Ich habe in der folgenden Tabelle die vor und die nach dem 17. Juli ausgeschlüpften Schmetterlinge getrennt aufgeführt. Addiert man sämtliche Zahlen der Überreife- und Normalreifekulturen, so stellt sich das Sexualverhältnis für die ersteren 83 ♀ : 135 ♂, für die letzteren 178 ♀ : 95 ♂, mit anderen Worten: in der ersten Periode schlüpfen erheblich mehr Männchen als Weibchen aus der Puppe aus; die männlichen Schmetterlinge haben im allgemeinen eine kürzere Puppenruhe als die weiblichen. Dieser Unterschied ist leicht verständlich, wenn wir den Entwicklungsgrad der Gonaden berücksichtigen. Die Ovarien der Raupen sind auffällig klein. Ihr Wachstum und ihre Ausgestaltung fällt somit hauptsächlich in die Zeit der Puppenruhe und trägt zur Verlängerung derselben bei.

Bei Störungen der Eiablage, wie sie durch Überreife herbeigeführt werden, kommt es fast stets vor, daß eine größere oder geringere Anzahl Eier verspätet abgelegt werden. So können, nachdem das Hauptgelege in durchaus normaler Weise gebildet worden ist, 2—8 Tage später noch kleinere Eierhäufchen entstehen, oft sogar mehrere. In der Regel liefern solche Spätlinge keine Raupen, so bei den Kulturen 5 b (Überreife des normalen Geleges 6 Tage, der späteren Ablagen 14—16 Tage), 6 a (Überreife 6 Tage, resp. 17 Tage), 21 (Überreife 8 Tage resp. 14 bis 16 Tage), 23 (Überreife 11 Tage, resp. 17 Tage), 29 (Überreife 11 Tage resp. 16 Tage), 32 (Überreife 12 Tage resp. 16 Tage), 36 (Überreife 14 resp. 16 Tage), 37 (Überreife 15 resp. 16 Tage). Von diesen Kulturen waren 5 b und 6 a Zimmerkulturen mit männlicher Überreife, die übrigen Kältekulturen mit weiblicher Überreife. Selten entwickelten sich die nachträglich abgelegten Eiportionen, so bei Kultur 7 (Überreife des ♂ 6 Tage). Hier schlüpften noch 3 ♀ und 5 ♂ aus, obwohl die Überreife auf 8 bis 14 Tage gestiegen war. Die Nachgelege von 22 (weibliche Überreife bei Kälte 9 Tage) lieferten sogar 12 ♀, 13 ♂; bei ihnen war die Überreife auf 11—14 Tage gestiegen. Auf der Grenze der Entwicklungsmöglichkeit stand das Nachgelege von Kultur 39. Als es abgelegt wurde, war das betreffende Weibchen 18 Tage alt. Das Nachgelege enthielt 9 embryonierte, nicht geschlüpfte

Eier. Zwei Eier waren geschlüpft; die ausgekrochenen Raupen waren aber schwächlich und entwicklungsunfähig. Hier war aber auch das Hauptgelege nicht mehr vollkommen entwicklungsfähig gewesen. Ich untersuchte nur den dritten Teil desselben genauer. In ihm fanden sich 7 Raupen, die sich aus dem Schwamm nicht hatten herausarbeiten können, außerdem 60 Eier, die noch Raupen enthielten, von denen einige schon während der Entwicklung abgestorben waren.

Daß nicht alle Eier eines Geleges sich entwickeln, kommt übrigens auch bei Schmetterlingen vor, bei denen keine Störung der Eiablage durch Überreife gegeben ist. Ein Beispiel ist Kultur 17. Das betreffende Gelege hatte ich in 3 Teile gesondert. Die Mitte war zur Märzkultur verwandt worden, die beiden Enden wurden im April getrennt voneinander gezüchtet. Ich hatte dieses Verfahren, wie im vorliegenden so auch in einigen anderen Fällen benutzt, um festzustellen, ob in den einzelnen Abschnitten des Geleges Unterschiede im Sexualitätsverhältnis vorhanden waren, was, wie ich schon oben bemerkt habe, nicht zutrifft. Das hintere Ende lieferte 57 Raupen, von denen 26 auf ihr Geschlecht geprüft wurden (14 ♀, 12 ♂). Bei genauer Untersuchung nach Verlauf von Monaten stellte es sich heraus, daß 7 Raupen das Gespinnst, 36 weitere die Eischalen nicht hatten verlassen können. Fast die Hälfte der Eier hatte somit keine Raupen geliefert.

Da die ausgeschlüpften Raupen kein absolut sicheres Bild vom Sexualverhältnis eines Geleges liefern, hatte ich nach dem Ausschlüpfen der Raupen die Reste der Gelege aufbewahrt, um die Zahl der unentwickelt gebliebenen Eier zu bestimmen. Leider wurde meine Absicht vereitelt, indem durch ein Versehen des die Kulturen überwachenden Präparators die meisten der Gelege und zwar besonders diejenigen, von denen ich Raupen gewonnen hatte, vor der Untersuchung weggeworfen wurden. Ich konnte außer den aufgeführten, nur noch folgende Gelege untersuchen. Im vorderen Ende der Kultur 2a fanden sich 4 nicht geschlüpfte Raupen, im hinteren Ende sogar annähernd 100, von denen ein kleiner Teil im Gespinnst, der größere in den Eischalen eingeschlossen war. Das Gelege 7a enthielt noch 76 Raupen, davon 12 im Gespinnst, 64 in den Eischalen, das Gelege 12, 10 bis 20 embryonierte Eier, das Gelege 22a, 15 bräunliche, offenbar

unentwickelt gebliebene Eier, die vom gleichen Weibchen stammenden Spätablagen 22b, c, d viele bräunliche Eier. Vom Gelege 23 waren im Hauptteil noch 23 embryonenhaltige Eier vorhanden, in dem kleinen 8 Tage später abgelegten Nachgelege 8. In den übrigen noch zur Untersuchung gelangten Gelegen fanden sich keine leeren Eischalen, durch deren Nachweis man die Existenz ausgekrochener Raupen feststellen kann, sondern nur bräunliche Eier, in denen keine Embryonen nachweisbar waren, die entweder gar nicht befruchtet worden waren, oder sehr frühzeitig ihre Entwicklung eingestellt hatten. Derartige braune Eier fanden sich auch in Kulturen, welche keine Raupen geliefert hatten; es sind die Kulturen 1, 3b, 8, 9, 10, 15, 16II, 19, 20, 24, 26, 34, 37, 38, 41. Auch hierbei stellte sich die Merkwürdigkeit heraus, daß Kulturen von gleicher Überreife sich ganz verschieden entwickelten, indem einige gute Zuchtresultate lieferten, andere gänzlich versagten. Am interessantesten ist in dieser Hinsicht Kultur 37. Sie bestand aus zwei Geschwisterweibchen, die am gleichen Tag geschlüpft waren und zu denen ich 3 Männchen hinzugesetzt hatte. Beide waren 15 Tage überreif und setzten 2 gut aussehende Gelege ab. Aus dem einen krochen zahlreiche Raupen aus, aus dem anderen gar keine. Das Weibchen, welches die ungünstigen Resultate geliefert hatte, hatte allerdings schon vorher begonnen, Gelegefasern abzusetzen; auch enthielt es nach seinem Tode noch 50 nicht abgesetzte Eier im Leib, während das andere völlig abgelaicht war.

Ich komme damit auf einen Punkt zu sprechen, der auch für die Kritik des Sexualverhältnisses von Wichtigkeit ist, ob nämlich ein Weibchen sich seines Eivorrats vollkommen entledigt hat oder nicht. Über diesen Punkt findet man in der folgenden Tabelle die nötigen Angaben, soweit ich die Schmetterlinge darauf untersucht habe.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über den Verlauf der Kulturen 1922/23 kann ich darauf verzichten, die einzelnen Protokolle, wie ich es für 1921/22 getan habe, mitzuteilen, und beschränke mich auf eine tabellarische Übersicht der gewonnenen Resultate.

Übersicht der Kulturen im Jahre 1923, geordnet nach Temperatur und Überreife.

I. Zimmertemperatur. a) Überreife des Weibchens.

Nr.	Alter des Weibchens	Alter des Männchens	Überreife	Raupen im März	Raupen im April	Schmetterlinge vor 18.7.	Schmetterlinge nach 18.7.	Total	Bemerkungen
4	12.7.—17.7.	16.7.—17.7.	5	—	viele Raupen, wurden nicht gezüchtet				Normales Gelege.
3	10.7.—17.7.	16.7.—17.7.	7	26 ♀, 28 ♂	33 ♀, 33 ♂	1 ♀, 19 ♂	3 ♀	63 ♀, 80 ♂	Normales Gelege.
2a	10.7.—17.7.	15.7.—17.7.	7	16 ♀, 3 ♂	35 ♀, 20 ♂	11 ♀, 4 ♂	8 ♀, 2 ♂	70 ♀, 29 ♂	Normales Gelege, bis auf 2 Eier alles geschlüpft.
2b	10.7.—19.7.	17.7.—19.7.	9	—	21 ♀, 19 ♂	1 ♂	2 ♀, 4 ♂	23 ♀, 24 ♂	
19	13.7.—21.7.	19.7.—21.7.	8	keine Raupen		—	—	—	Gelege wahrscheinlich nicht befruchtet.
8	19.7.—20.7.	17.7.—20.7.	9	keine Raupen		—	—	—	Abnormes Gelege, braune Eier nicht völlig abgelegt.
9	12.7.—20.7.	17.7.—20.7.	8	keine Raupen		—	—	—	Normales Gelege.
15	12.7.—21.7.	20.7.—21.7.	9	keine Raupen		—	—	—	♀ enthält Eier, Gelege normal, Eier bräunlich.
20	12.7.—21.7.	18.7.—21.7.	9	keine Raupen		—	—	—	Mehrere Eihaufen, Eier bräunlich, ♀ abgelaicht.
24	16.7.—25.7.	20.7.—25.7.	9	keine Raupen		—	—	—	Leidlich normales Gelege, bräunliche Eier.
25	16.7.—24.7.	19.7.—24.7.	8	—	88 ♀, 53 ♂	2 ♂, 12 ♂	6 ♀, 6 ♂	96 ♀, 71 ♂	Weibchen hatte schon vorher Wolle gebildet, Gelege normal.
25 II	16.7.—28.7.	19.7.—28.7.	12	keine Raupen		—	—	—	Nachträgl. Gelege, Weibchen völlig abgelaicht.
26	16.7.—25.7. 16.7.—29.7.	23.7.—25.7.	9—12	keine Raupen		—	—	—	Weibchen hat 2 Gelege gebildet, enthält noch Eier.
27	16.7.—27.7. 16.7.—29.7.	?	11—13	keine Raupen		—	—	—	Weibchen hat 2 Gelege gebildet, enthält noch Eier.
34	16.7.—27.7. 16.7.—28.7.	14.7.—27.7.	11—12	keine Raupen		—	—	—	♀ hat 2 Eihaufen gebildet. enthält noch Eier.
38	20.7.—31.7.	?	11	keine Raupen		—	—	—	Gelege leidlich, braune Eier, ♀ enthält noch 20 Eier.
			Gesamt	42 ♀, 31 ♂	177 ♀, 125 ♂	14 ♀, 36 ♂	19 ♀ 12 ♂	272 ♀, 204 ♂	

b) Überreife des Männchens.

5 I	15.7.—17.7.	10.7.—17.7.	7	11 ♀, 20 ♂	43 ♀, 33 ♂	15 ♀, 6 ♂	19 ♀, 6 ♂	89 ♀, 70 ♂	Schönes Gelege, außerdem 2 kleine Nachgelege, Weibchen völlig abgelaicht.
5 II	15.7.—?	10.7.—?	11 (?)						
III				—	1 ♀, 5 ♂	—	—		
6 a	15.7.—17.7.	11.7.—17.7.	6	—	viele Raupen, nicht kultiviert			—	Normales Gelege, außerdem kleines Nachgelege, Weibchen fast abgelaicht.
6 a II	15.7.—28.7.	11.7.—28.7.	17	—	keine Raupen		—	—	
6 b	15.7.—19.7.	11.7.—19.7.	8	38 ♀, 31 ♂	viele Raupen, nicht kultiviert			38 ♀, 31 ♂	
7	16.7.—19.7.	10.7.—19.7.	8	21 ♀, 17 ♂	58 ♀, 47 ♂	21 ♀, 10 ♂	4 ♀, 9 ♂	104 ♀, 83 ♂	Normales Gelege mit einem kleinen Nachgelege, ca. 70 Raupen, teils im Gelege, teils in Eischalen zurückgehalten, ♀ völlig abgelaicht.
7 II	16.7.—21.7.	11.7.—21.7.	10	—	3 ♀, 5 ♂	—	—	3 ♀, 5 ♂	
12	17.7.—21.7.	12.7.—21.7.	9	11 ♀, 20 ♂	35 ♀, 28 ♂	—	12 ♀, 13 ♂	58 ♀, 61 ♂	Normales Gelege, ♀ abgelaicht.
13	18.7.—19.7.	12.7.—19.7.	—	kein Gelege	—	—	—	—	
14	18.7.—19.7.	13.7.—19.7.	—				—	—	♀ völlig abgelaicht.
10	16.7.—25.7.	11.7.—24.7.	—	Gelege scheint unbefruchtet zu sein					
				81 ♀, 88 ♂	140 ♀, 118 ♂	36 ♀, 16 ♂	35 ♀, 28 ♂	292 ♀, 250 ♂	

c) Normalkulturen.

0	—	—	—	—	4 ♀, 6 ♂	3 ♀, 11 ♂	8 ♀, 3 ♂	15 ♀, 20 ♂	
16	20.7.—21.7.	18.7.—21.7.	1	31 ♀, 36 ♂	36 ♀, 28 ♂	1 ♀, 4 ♂	16 ♀, 2 ♂	84 ♀, 70 ♂	Alle Eier geschlüpft, ♀ völlig abgelaicht.
17 I	20.7.—22.7.	20.7.—22.7.	2	—	18 ♀, 16 ♂	—	10 ♀, 5 ♂	55 ♀, 53 ♂	♀ völlig abgelaicht. Gelege in 3 Teilezerlegt: I, II, III; in III die meisten Eier geschlüpft, immerhin 40 in den Eischalen zurückgehalten.
17 II			2	13 ♀, 20 ♂	—	—	—		
17 III			2	—	11 ♀, 4 ♂	—	3 ♀, 8 ♂		
				44 ♀, 56 ♂	69 ♀, 54 ♂	4 ♀, 15 ♂	37 ♀, 18 ♂	154 ♀, 143 ♂	

II. Kältekulturen (10—12° C.). Überreife des Weibchens.

Nr.	Alter des Weibchens	Alter des Männchens	Überreife	Raupen im März	Raupen im April	Schmetterlinge vor 18. 7.	Schmetterlinge nach 18. 7.	Total	Bemerkungen
21 I	14.7.—22.7.	?—22.7.	8	17 ♀, 2 ♂	5 ♀, 1 ♂	—	—	22 ♀, 3 ♂	Schönes Gelege u. 2 Nachgelege, ♀ abgelaicht.
II III	14.7.—30.7.	—	16	keine Raupen		—	—	—	
22 I	14.7.—23.7.	17.7.—23.7.	9	—	43 ♀, 39 ♂	2 ♀, 13 ♂	6 ♀, 1 ♂	51 ♀, 53 ♂	Schönes Gelege, bis auf 15 braune Eier geschlüpft. Im Nachgelege viele braune Eier, ♀ abgelaicht.
II-IV	„ 25. 28.7.	—	11—14	—	12 ♀, 13 ♂	—	—	12 ♀, 13 ♂	
23	13 7.—24.7.	14.7.—23.7.	11	14 ♀, 23 ♂	viele Raupen, nicht gezüchtet			14 ♀, 23 ♂	
29	14.7.—25.7.	22.7.—25.7.	11	—	24 ♀, 21 ♂	4 ♀, 9 ♂	12 ♀, 4 ♂	40 ♀, 34 ♂	Schönes Gelege; ♀ bis auf wenige Eier abgelaicht.
31	15.7.—26.7.	?	11	—	22 ♀, 29 ♂	3 ♀, 5 ♂	4 ♀	29 ♀, 34 ♂	Schönes Gelege, ♀ bis auf 15 Eier abgelaicht.
30	14.7.—26.7.	21.7.—26.7.	12	sehr viele Raupen, nicht kultiviert				—	Schönes Gelege.
32	14.7.—26.7.	21.7.—25.7.	12	„	„	„	„	—	Schönes Gelege, Weibchen fast ganz abgelaicht.
33	14.7.—27.7.	14.7.—27.7.	13	17 ♀, 30 ♂	50 ♀, 37 ♂	4 ♀, 7 ♂	13 ♀, 10 ♂	84 ♀, 84 ♂	Gelege mittelmäßig, ♀ hat noch Eier im Leib.
36a	14.7.—28.7.	?	14	—	79 ♀, 79 ♂	13 ♀, 16 ♂	23 ♀, 1 ♂	115 ♀, 96 ♂	Geschwisterweibchen, völlig abgelaicht. Normale Gelege.
36b	14.7.—28.7.	?	14	—	55 ♀, 35 ♂	3 ♀, 18 ♂	22 ♀, 15 ♂	80 ♀, 68 ♂	
37a	14.7.—29.7.	?	15	—	keine Raupen		—	—	Geschwisterweibchen auch zu 36, normale Gelege, ♀ 37 b völlig abgelaicht, 37a noch 50 Eier im Leib.
37b	14.7.—29.7.	?	15	—	viele Raupen, nicht kultiviert			—	
39 I	15.7.—31.7.	23.7.—31.7.	16	47 ♀, 69 ♂	57 ♀, 46 ♂	—	7 ♀, 6 ♂	111 ♀, 121 ♂	Schönes Gelege, enthält ca. 70 nicht geschl. Raupen.
39 II	15.7.— 2.8.	—	18	—	2 schwächliche Raupen		—	—	Nachgelege, 9 zurückgehaltene Raupen.
40	15.7.—31.7.	30.7.—31.7.	16	—	keine Raupen		—	—	Gelege ganz unregelmäßig.
41	15.7.— 3.8.	30.7.— 3.8.	18	—	keine Raupen		—	—	Eier zerstreut.
				95 ♀, 124 ♂	347 ♀, 300 ♂	29 ♀, 68 ♂	87 ♀, 37 ♂	558 ♀, 529 ♂	

Beurteilung der Züchtungsergebnisse des Jahres 1923.

Bei der Beurteilung der Befunde, die ich in voranstehender Tabelle zusammengestellt habe, kann ich mich sehr kurz fassen. Sämtliche weibliche Überreifekulturen bei Zimmertemperatur zusammen genommen ergeben 272 ♀, 204 ♂, die Kulturen von männlicher Überreife 292 ♀, 250 ♂, beide addiert 564 ♀, 454 ♂, somit ein geringes Überwiegen der Weibchen über die Männchen. Die Kältekulturen, bei denen nur die weibliche Überreife berücksichtigt wurde, lieferten ein ähnliches Resultat 558 ♀, 529 ♂, desgleichen die im Zimmer geführten Kulturen mit normaler Reife 154 ♀, 143 ♂. In allen Kulturen ergab sich ein geringfügiges Überwiegen des weiblichen Geschlechts. Wie im vorigen Jahre, so haben auch 1923 die Zuchten zum Resultat geführt, daß Überreife keine Verschiebung der Sexualität zur Folge hat. Auch wenn wir die Einzelbefunde in den drei Überreifeserien uns ansehen, kommen wir zu dem gleichen Ergebnis. Es sind zwar in den Einzelbefunden Unterschiede vorhanden; diese sind aber sicher zufälliger Natur. Es herrscht bei ihnen keine Proportionalität des Überwiegens des weiblichen Geschlechts zum Grad der Überreife.

Soweit haben die Untersuchungen des Jahres 1923 die des Vorjahrs bestätigt, so daß wir das Resultat für gesichert ansehen können: Der Schwammspinner verhält sich der Überreife gegenüber ganz anders als unsere Froscharten. Der Grund hierzu ist wohl in dem verschiedenen Verhalten des Geschlechtsapparats gegeben. Bei den Fröschen kann man einen scharfen Unterschied zwischen Ovarium und Geschlechtswegen und demgemäß auch zwischen ovarialer und uteriner Überreife machen. Maßgebend für die Geschlechtsverschiebung ist bei ihnen die uterine Überreife, die Zeit, welche verflossen ist, seitdem die Eier aus dem Ovarium in den Uterus übergetreten sind. Bei den Schmetterlingen dagegen gehen Eileiter und Ovarien kontinuierlich ineinander über. Die Eier verweilen bei Überreife im Ovar und passieren nur rasch bei der Eiablage den Eileiter. Dies Verhalten ist eher den Fällen zu vergleichen, in denen das Weibchen spät zur Umklammerung durch das Männchen zugelassen wird. Derartige ovariale Überreife wird bei Fröschen sicherlich nicht ohne Einwirkungen auf die Beschaffenheit der Eizellen sein, aber einen

direkten Einfluß auf das Sexualitätsverhältnis hat sie nach meinen Untersuchungen nicht. Denn das Sexualitätsverhältnis ist das gleiche, gleichgiltig, ob man Frösche aus dem Anfang oder dem Ende der Brunstperiode untersucht, ob die Entleerung aus dem Ovar rasch oder nach langer Dauer der Umklammerung durch das Männchen geschieht.

Stehen die Untersuchungen des Jahres 1923 mit denen des Jahres 1922 in Bezug auf die Wirkung der Überreife in voller Übereinstimmung, so herrscht rücksichtlich der Temperatureinflüsse ein ausgesprochener Unterschied. 1922 hatte sich für die Kältekulturen ein starkes Überwiegen des weiblichen Geschlechts ergeben. Dies gilt nicht für die Ergebnisse des Jahres 1923. Bei ihnen ist eher das Gegenteil der Fall. Der bei allen Kulturen vorhandene Weibchenüberschuß ist bei den Zimmerkulturen größer als bei den Kältekulturen. Ich muß mich hier begnügen, die Tatsache festzustellen. Eine Erklärung für sie zu geben bin ich nicht im Stande. Angesichts der so klaren Resultate des Jahres 1922 und der gleichlautenden Angaben Seilers möchte ich mich dahin aussprechen, daß der das weibliche Geschlecht befördernde Einfluß niederer Temperaturen zu Recht besteht, bei den diesjährigen Zuchten aber aus unbekannten Gründen nicht zum Auswirken kommen konnte.

Benützte Literatur.

Crew F. A. E., Sex reversal in frogs and toads. A review of the recorded cases of abnormality of the reproductiv system and an account of an breeding experiment. Journ. of genetics, Bd. 2, S, 141—181, 1921.

Hertwig R., Über den Einfluß der Überreife der Eier auf das Geschlechtsverhältnis von Fröschen und Schmetterlingen. Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jahrg. 1921, S. 269.

Koehler Otto, Über den Einfluß des Keimzellalters auf die Vererbungsrichtung. Biolog. Zentralbl., Bd. 43, S. 131.

Seiler J., Geschlechtschromosomen-Untersuchungen an Psychiden. I. Experimentelle Beeinflussung der geschlechtsbestimmenden Reifeteilung bei Talaeporia tubulosa. Arch. f. Zellforsch., Bd. XV, S. 249.

Witschi E., Der Hermaphroditismus der Frösche und seine Bedeutung für das Geschlechtsproblem und die Lehre von der inneren Sekretion der Keimdrüsen. Arch. Entw.-Mech., Bd. 49, S. 316—358.

— Über die genetische Konstitution der Froschzwitter. Biol. Zentralbl., Bd. 43, S. 83.

Ergebnisse der Bearbeitung mitteltertiärer Wirbeltier-Reste aus Deutsch-Südwest-Afrika.

Von **E. Stromer.**

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Dezember 1923.

In den Diamantfeldern des Lüderitzlandes wurden von den Herren Prof. E. Kaiser und Diplom-Ingenieur Dr. Beetz zahlreiche Reste Land- und Süßwasser bewohnender Wirbeltiere gefunden, mir nach und nach zur Bearbeitung übergeben und der paläontologischen Staats-Sammlung in München geschenkt. Über einen kleinen Teil habe ich hier schon eine erste Mitteilung veröffentlicht (1. Mitteilung über tertiäre Wirbeltier-Reste aus Deutsch-Südwest-Afrika vom 3. XII. 1921, München 1922, S. 331—340); zwei weitere, ganz allgemein gehaltene Artikel sind nach Eintreffen neuen Materials in der Paläontol. Zeitschr., Bd. 5, S. 226—228, Berlin 1923 und in der Umschau, Jahrg. 26, Nr. 46, Frankfurt a. M. 1922 erschienen. Die genaue, mit Abbildungen ausgestattete Beschreibung wird aber in Prof. E. Kaisers großes Werk „Die südlichen Diamantfelder Südwest-Afrikas“ aufgenommen. Da nun dessen Druck unter den jetzigen Umständen sehr erschwert und verzögert ist, und eine kurze Übersicht der Ergebnisse meiner umfangreichen und seit längerer Zeit fertig gestellten Arbeit erwünscht erscheint, möchte ich sie hier darbieten.

Die Ausbeute, welche fast nur aus einzelnen Knochenstücken, Kieferteilen und Zähnen, selten aus vollständigeren Resten besteht, wurde in tonig-sandigen Schichten an drei weit getrennten Fundorten gemacht, die der Kürze halber im folgenden als 1, 2 und 3 bezeichnet werden, nämlich: 1. in Wannen der Elisabethfelder etwa 38 km südlich von Lüderitzbucht, 2. im Langentale

etwa 80 km südlich dieses Ortes[1]) und 3. in 30 m Tiefe eines Bohrloches 2 km westlich des Betriebes 4 der kolonialen Bergbau-Gesellschaft etwa 20 km südlich von Lüderitzbucht. Alle Fundplätze sind also nahe der Küste in der fast wasserlosen Namib (Küstenwüste) gelegen. Es handelt sich um folgende Formen:

I. *Creodonta, A. Hyaenodontidae*: *Metapterodon Kaiseri n. g. n. sp.*, eine Schädelhälfte mit Metacarpale II von 1. Etwas kleiner als ein Fuchs. Schädel gestreckt, schmal; For. infraorbitale über der Grenze des P 3 und P 4, dahinter starker Wulst bis zum Jochbogen. Harter Gaumen schmal, bis weit hinten geschlossen, Pterygoidea hoch bis Unterkiefergelenk. Zahngröße von P 3 bis M 2 stark zunehmend, M 2 Brechscheerenzahn. P 3 einfach, zweiwurzelig, P 4—M 2 dreiwurzelig, mit deutlichem Innenhöcker, einem einfachen Haupthöcker, davor winziger Parastyl, außen Cingulum, hinten bei P 4 Höckerchen, bei M 1 und 2 schneidender Metastyl. M 3 rudimentär, stiftförmig. Metacarpale II ohne Gelenkfläche für Carpale I, ungewöhnlich lang und schlank.

Die Form ist jedenfalls von allen bisher bekannten Hyaenodontinen deutlich verschieden und läßt sich am besten von einer dem Apterodon des ägyptischen Oligocäns ähnlichen ableiten. Ihre Backenzähne schließen sich noch am besten an die von Pterodon an, Hyaenodon selbst sowie Neohyaenodon aber sind in ihnen und in der Länge des harten Gaumens noch weiter spezialisiert. In der Länge der Metapodien steht Metapterodon am höchsten. Es war wohl ein sehr guter Läufer.

B. g. et sp. indet. Kleines Unterkieferstück mit einem M von 1. Es läßt sich nicht einmal entscheiden, ob hier der Rest eines creodonten oder fissipeden Carnivoren vorliegt.

II. *Perissodactyla, Rhinoceridae*: *Rhinocerine g. et sp. indet.* Unterkieferstücke aus 2. So groß wie Rh. simus, aber in den Zahnformen verschieden, Backenzähne mäßig hochkronig.

III. *Artiodactyla, A. Suidae*: *Diamantohyus africanus* Stromer (1922, S. 332) Oberkiefer mit P 3, M 1 und M 2 und wenige Fußknochen aus 2. Klein, primitiv. Backenzähne niedrig mit sehr runzeligem Schmelz. P 3 länger als breit mit drei stark ab-

[1]) Siehe meine erste Mitteilung 1922, S. 331 ff. über einen ersten Teil dieser Funde!

geplatteten Höckern in Dreieckstellung. M 1 und 2 rechteckig, wenig länger als breit, primitiv vierhöckerig; zwei Außenhöcker mit „Gipsnähten", zwei fast halbmondförmige Innenhöcker, keine Zwischenhöckerchen, Cingulum stark außer an Innenseite. Zweite vordere Zehe wahrscheinlich schwach; Talus und Cuboideum sehr gestreckt, denjenigen primitiver Selenodonten ähnlich.

Aff. Palaeochoerus Pomel, subg. *Propalaeochoerus* Stehlin, *sp. indet.* Unterkieferstück mit M 2 und 3 und Oberhälfte des Metacarpale III aus 2. Klein, primitiv. MM im wesentlichen wie bei Propalaeochoerus aus den oligocänen Quercy-Phosphoriten Frankreichs. Metacarpale III so groß wie bei Diamantohyus, aber deutlich in Form verschieden.

Die Ähnlichkeiten der Backenzähne der ersten Gattung mit denen von Dicotylinen und manchen Suinen des europäischen Mitteltertiärs scheinen nicht auf unmittelbarer Verwandtschaft, sondern auf dem gemeinsamen Besitz primitiver Merkmale der Suiden zu beruhen. Mit den rezenten Suiden Afrikas läßt sich ebenfalls keine Beziehung herstellen. Bei der zweiten Form dagegen wäre eine solche zu Potamochoerus immerhin möglich, die Reste reichen aber dazu nicht aus, hierüber oder auch über die Frage, ob wirklich das primitivere Subgenus des Palaeochoerus vorliegt, einige Sicherheit zu gewinnen. Jedenfalls ist sehr bemerkenswert, daß eine stammesgeschichtlich so wichtige, primitive Schweineform wie Palaeochoerus in Südafrika gelebt zu haben scheint.

B. *Antilopidae*: *Cfr. Strogulognathus sansaniensis* Filhol. Eine Anzahl in Größe und Form zusammenpassender Skelettstücke und Unterkieferstücke mit M 2 und 3 sowie unvollständige obere MM aus 2 und ein Zehenglied aus 3 gehören wohl zu einer Art von etwas über Gemsengröße. Ihre MM sind niedrig, vierhöckerig und selenodont. Der Schmelz ist glatt, der untere M 2 deutlich länger als breit, der untere M 3 mit nur kleinem Anhang versehen. Die Innenwand der unteren MM besitzt Wölbungen und Nebenhöckerchen. Am Dens des Epistropheus ist die Zapfenform noch angedeutet. Die Füße sind adaptiv gebaut. Das vordere und hintere Kanonenbein ist sehr dick, besonders das 3. Metapodium hinten, die Trennungsfurchen der Metapodien sind noch sehr deutlich, untere Gelenkkiele aber gut ausgebildet. Die Zehen sind

kurz, die zweiten Glieder unten schmal, ebenso die obere Gelenkfurche des Talus. Das Cubonaviculare endlich zeigt deutliche Verwachsungs-Spuren.

Die Form besitzt in ihrem Unterkiefer noch am meisten Ähnlichkeit mit dem sehr unvollkommen bekannten Strogulognathus aus dem Obermiocän Frankreichs, und ließe sich wohl von solchen Selenodontia, wie den Gelociden des europäischen Oligocäns ableiten, reiht sich aber wahrscheinlich wie jener unter die primitiven Antilopiden ein.

Propalaeoryx austroafricanus n. g. n. sp. Bezahnter Unterkiefer von 1. Etwa so groß wie bei dem Damhirsche. Vorderzähne schmale Schaufeln. Reihe der PP fast so lang als die der MM. Schmelz runzelig. Vier zweiwurzelige PP, etwa doppelt so lang als breit, ohne Innenwand oder besonderen Innenhöcker, aber hintere PP mit je 2 Kulissen vor und hinter dem gestreckten Haupthöcker. MM nicht hoch, sehr deutlich gestreckt. Ihre Außenhöcker V-förmig, außen vorn Cingulum, nur am M 1 deutliche Basalknospe. Innenwand aus zwei platten, nicht tief getrennten Höckern ohne Rippen, hinter jedem ein Pfeilerchen. Lobus des M 3 breiter als lang mit V-förmigem Außenhöcker. Vielleicht gehören einige wenige Knochenstücke hieher, die vereinzelt in 1 gefunden wurden.

Palaeoryx Stuetzeli Schlosser aus dem Unterpliocän von Samos gleicht dieser Form in den P 2—P 4, nicht aber in den MM und in der Schmelzrunzelung. Andere Antilopiden sind noch mehr verschieden. Die miocänen Cerviden besitzen die Palaeomeryx-Falte und die Giraffiden einen Innenpfeiler am P 3 und P 4. Besonders bemerkenswert gegenüber all diesen ist das Vorhandensein eines noch zweiwurzeligen P 1, der schon bei den oligocänen Gelociden stärker rückgebildet zu sein pflegt. Auffällig ist auch die starke Streckung sämtlicher PP. Es scheint also ein in Manchem besonders primitiver Antilopide vorzuliegen.

Fußnochen meist kleiner Artiodactyla aus 2 können zu keiner der hier beschriebenen Formen gehören; sie sind nicht näher bestimmbar und erweisen nur das Vorhandensein einer größeren Mannigfaltigkeit von Artiodactylen in 2.

IV. *Hyracoidea, Hyracidae*: *Prohyrax tertiarius n. g. n. sp.* Ein linker Oberkiefer mit P 3—M 3 aus 2 und eine nahe dabei

gefundene Spitze eines oberen I gehören zu einem Tier etwa von der Größe des Palaeotherium parvulum Laur., also zu einem stattlichen Hyraciden. Der Hinterrand des Jochbogenansatzes liegt ober dem M 3, der Vorderrand der Augenhöhle ober dem M 1. Zahnschmelz glatt und, wie normal bei Hyracoidea gegenüber fast allen Placentalia, voll Dentinröhrchen; Backenzahnkronen mäßig hoch. Hintere 2 obere PP und MM vierwurzelig und lophodont. PP kleiner und einfacher als MM, diese mit W-förmiger Außenwand. Schräge zwei Querjoche einfach, Cingulum zum Teil stark. Oberer I wahrscheinlich gerade, hohe Spitze mit drei verschieden scharfen Kanten.

Die Form vermittelt zwar in der Lage der Augenhöhle zwischen den oligocänen und rezenten Hyracoidea Afrikas, läßt sich aber weder von einem bekannten oligocänen ableiten, noch als Vorfahre eines rezenten ansehen. Die Höhe ihrer Backenzähne spricht für einen Steppenbewohner; solche haben sich also bei dieser Tiergruppe nicht erst in jüngster Zeit herausgebildet, wie fälschlich vermutet wurde.

V. *Myohyracoidea n. subordo, Myohyracidae*: *Myohyrax Oswaldi* Andrews. Einige obere und untere Molaren, Unterkieferstücke und vielleicht auch Bruchstücke von Extremitätenknochen aus 3 gehören nach Form und Größe zusammen und zu der Art, die aus dem Untermiocän des Victoria-Sees nach einem mit P 2—M 1 versehenen Unterkieferstück und oberem Backenzahn beschrieben wurde. Ein Unterkieferstück erweist das Vorhandensein einer völlig geschlossenen Zahnreihe, seine niedrige Symphyse endet unter dem P 1, auf der sehr wenig gewölbten Außenseite liegt in Mitte der Höhe unter dem P 1 und P 3 je ein For. mentale.

Myohyrax Doederleini n. sp. Eine Anzahl von Zähnen, bezahnten Kieferstücken und Knochenstücken in fossilen Gewöllen von 1 beisammen gefunden gehören einer Art an, die etwas kleiner als die vorige ist und innen am Vorderpfeiler der unteren MM eine viel schwächere Falte hat als sie. Etwa von Rattengröße. Praemaxillae mit langer Mediannaht. Gaumen bis mindestens M 2 geschlossen, Jochbogenansatz ober M 1—2. Unterkiefer gestreckt, niedrig, außen sehr wenig gewölbt, mit Querrollengelenk, deutlichem Kronfortsatz und niedriger kurzer Symphyse. Oben wie unten 3 platte, innen schmelzlose, ziemlich nach vorn gerichtete I I;

I 1 vergrößert, I 3 am schwächsten. Oberer C unbekannt, unterer schwach. Schmelz der Backenzähne, wie normal bei Placentalia, ohne Dentinröhrchen, glatt. Backenzähne deutlich länger als breit, besonders untere; letzter zu primatischem Stift reduziert. Mindestens 3 PP da, hintere M-artig. Untere Backenzähne zweiwurzelig, oben PP drei-, MM vierwurzelig; vordere Kronen mäßig hoch, hintere immer höher, unten fast prismatisch werdend. Obere Backenzähne bis M 2 größer werdend, viereckig, lophodont; Außenwand mit 2—4 Rippen, zwei schräge Querjoche mit je zwei Schmelzinseln. Untere bis P 4 länger werdend, schmal, durch je zwei opponierte Querfalten in ziemlich gleiche, gerundet dreieckige Vorder- und Hinterhälfte geteilt; Rückseite und Innenseite der Vorderhälfte nicht konvex, sonst konvex umgrenzt.

Atlas mit For. obliquum und langem Canalis transversus, aber vordere Kerbe des gut entwickelten Seitenflügels nicht überbrückt. Epistropheus mit zapfenförmigem Dens. Lendenwirbel mäßig gestreckt. Sacrum vorn breit. Schwanz wohl ausgebildet. Scapula mit starkem Proc. coracoideus. Humerus gerade mit For. entepicondyloideum und supratrochleare, nicht starken Muskelhöckern, unten mit Rollengelenk. Radius nicht um Ulna rotierbar, oben nicht dick. Metacarpalia getrennt und schlank, Zehen wohl bekrallt. Femur mit rundem Kopf und starkem Troch. major und minor. Fibula nicht bis zum Fuß. Talus oben mit ausgefurchter Rolle, unten mit einfachem Kopf an gestrecktem Hals. Calcaneus mit langem Tuber; Cuboidgelenkfläche quer gestellt, Sustentaculum wohl entwickelt. Metatarsalia getrennt, sehr schlank. Zehenkrallen spitzig, etwas gekrümmt.

Protypotheroides Beetzi Stromer (1922, S. 333) Unterkieferstücke mit P 2—M 3 aus 2. Etwa von Kaninchengröße. Unterkiefer mäßig hoch, vorn niedrig werdend. Drei MM und mindestens drei PP in geschlossener Reihe, gleichartig. P 2 sehr hochkronig und schmal, zweiwurzelig, die anderen Backenzähne sehr wenig nach außen gebogene Prismen. Zahngröße vom P 4 an nach hinten zu geringer. M 3 nur ein Pfeiler, die anderen Zähne je zwei gleichartige Pfeiler mit Schmelzgrube in Mitte. Außenseite der Pfeiler stark gewölbt, innere flach und außer am P 2 und M 3 mit einer schwachen vorderen Falte.

Meine Vermutung (1922, S. 333), daß Protypotheroides seinen

nächsten Verwandten in Myohyrax habe, wird durch die Untersuchung des nun viel reicheren Materials nur bestätigt; er läßt sich auch in seiner Größe und der mehr prismatischen Ausbildung und Gleichartigkeit seiner Backenzähne als höher spezialisiert erkennen. Jedenfalls gehört er zu der von Andrews (1914) für Myohyrax aufgestellten Familie der Myohyracidae. Für sie ist aber eine neue Unterordnung zu errichten.

Myohyracoidea. Kleine Pflanzenfresser mit vollständigem Gebiß in wahrscheinlich geschlossener Reihe. Zahnformel wahrscheinlich primitiv, $\frac{3.1.4.3.}{3.1.4.3.}$ Oben wie unten I 1 vergrößert, M 3 aber zu einem Stift reduziert. I I stark nach vorn gerichtet, innen ohne Schmelz. Dieser glatt und ohne Dentinröhrchen. Unterer C schwach, oberer wohl auch. Backenzähne homöodont, untere zweiwurzelig, oben P P drei-, M M vierwurzelig. P P hochkronig, M M prismatisch werdend. Obere P 2—M 2 aus gerader Außenwand mit vier Rippen und aus zwei schrägen Querjochen mit je zwei Schmelzinseln. Untere viel schmaler, durch eine sehr tiefe äußere und innere Querfalte in zwei ziemlich gleiche gerundet dreiseitige Pfeiler geteilt, von denen jeder eine sekundäre Schmelzfalte besitzen kann.

Skelett sehr unvollkommen bekannt. Unterkiefer gestreckt mit kurzer, niedriger Symphyse, wohl entwickeltem aufsteigendem Aste und Kronfortsatze und Querrollengelenk. Atlas mit For. obliquum, aber offener Kerbe vorn am gut entwickelten Flügel. Epistropheus mit zapfenförmigem Dens. Lendenwirbel mäßig gestreckt, Sacrum vorn breit, Schwanz wohl lang. Humerus schlank mit schwachen Muskelansatzstellen, Querrollengelenk, For. supratrochleare und entepicondyloideum. Radius nicht rotierbar, oben nicht dick. Metacarpalia getrennt und schlank, Zehen bekrallt. Femur mit starkem Trochanter major und minor, anscheinend ohne tertius. Fibula nicht bis Fußwurzel. Talus mit ausgefurchter oberer Gelenkrolle, gestrecktem Hals und gewölbtem Kopf. Calcaneus mit sehr starkem Tuber und kräftigem Sustentaculum; distal quer abgestutzt. Fuß anscheinend serial. Metatarsalia getrennt, sehr schlank. Zehen mit spitzigen gekrümmten Krallen.

Die Ähnlichkeiten der Myohyracidae mit Hyracoidea werden durch zahlreiche, zum Teil wesentliche Unterschiede aufgewogen: Bei den Hyracoidea ist nämlich nach neueren von mir veranlaßten

Untersuchungen der Schmelz stets von vielen Dentinröhrchen durchzogen, was sich sonst fast nur bei Marsupialia findet; der vordere Gebißteil ist spezialisierter, der untere I 2 größer als der I 1; der M 3 wie auch sonst bei Huftieren größer oder wenig kleiner als der M 2, also nicht reduziert. Die unteren Backenzähne bestehen wie bei Perissodactyla wesentlich aus zwei gekrümmten Jochen ohne weitere Komplikation. Der Unterkiefer hat einen stark nach hinten konvexen Hinterrand und, wie sonst nur bei den Lagomorpha, ein For. mandibulare im Vorderrande des aufsteigenden Astes. Am Atlasflügel ist die vordere Kerbe überbrückt, der Dens des Epistropheus ist oben platt, die Lendenwirbel und der Schwanz sind kurz. Der Humerus hat oben starke Muskelhöcker, unten kein For. entepicond. Der Radius ist oben nicht so platt. Der Talus ist oben weniger ausgefurcht, unten, wenigstens bei rezenten, flach, und hat medial einen sehr bezeichnenden Absatz für die Tibia am kurzen Hals. Der Calcaneus besitzt bei rezenten einen kürzeren Tuber und kein Sustentaculum. Die Metapodien endlich sind nicht schlank und statt Krallen sind vorn wie hinten Nägel vorhanden.

Beruht auch Vieles auf höherer Spezialisierung der Hyracoidea, so geht diese doch mehrfach in eine ganz andere Richtung als bei den Myohyracidae. Diese können daher weder Angehörige noch Vorfahren der Hyracoidea sein, kaum nahe Verwandte.

Noch mehr Ähnlichkeit im Gebiß und Skelett besteht zwischen den Myohyracidae und den Typotheria, besonders den Protypotheriidae des südamerikanischen Tertiärs; aber bei näherem Vergleich beruhen sie großenteils auf gemeinsamem Besitz primitiver Merkmale und werden durch zahlreiche und wichtige Unterschiede aufgewogen. Der obere I 1 der Typotheria ist nämlich breit, der untere I 2 vergrößert und der vordere Teil der unteren MM kleiner als der hintere. Vor allem sind die Backenzähne zwar im Kronenbau sehr ähnlich, aber unten nach innen, oben nach außen konvex gekrümmt, und der M 3 ist keineswegs reduziert.

An den Praemaxillae ist die äußere Mediannaht kurz, der Unterkiefer ist hinten höher und hat eine längere, bald verfestigte Symphyse. Dem Humerus, der starke Muskelfortsätze hat, fehlt fast stets ein For. supratrochleare, das Femur besitzt dagegen

einen Troch. tertius. Im Fuße unterscheiden endlich vor allem die Gelenkung der Fibula mit der Fußwurzel, die schräge Stellung der Gelenke für Talus und Cuboideum am Calcaneus, die geringere Schlankheit der Metapodien und die distal unten verbreiterten oder hufartigen Endglieder.

Eine Einreihung der Myohyracidae in die Typotheria und ein gegenseitiges Abstammungsverhältnis erscheint deshalb nicht annehmbar. Die Stellung zu den Condylarthra des ältesten Tertiärs Europas und Nordamerikas, an die wegen des Fußbaues und mancher sonstiger primitiver Eigenschaften gedacht werden könnte, ist schon wegen der Spezialisierung der I I und der Backenzähne ausgeschlossen. Die Meniscotheriidae z. B., die neuerdings mit Hyrax in Verbindung gebracht wurden, haben kleine untere I I, nicht reduzierte letzte M M, kein For. entepicondyloideum und abgeplattete Endphalangen. Andere Säugetiergruppen aber kommen schon wegen der eigenartigen Bezahnung der Myohyracidae nicht in Betracht.

VI. *Rodentia duplicidentata, Ochotonidae*: *Australagomys inexpectatus n. g. n. sp.* Schädel mit Unterkiefer von 1. Etwas größer als Ochotona alpina Pallas. Unterer I im Querschnitt ein gerundetes gleichseitiges Dreieck mit Schmelz auch an den Seiten. Backenzahnformel $\frac{3.\ 2.}{2.\ 3.}$ Oben P 2 zu einfachem Stift rückgebildet, P 3 breit, dreieckig mit zwei schwachen Falten außen und einer innen; P 4—M 2 kleiner werdend, gleichartig, breit viereckig mit langer schmaler mittlerer Innenfalte, aber ohne äußere. Unten P 3 viereckig, breiter als lang, vorn schmal, nur innen mit kleiner Falte; P 4—M 2 aus je zwei querovalen Pfeilern, die innen und außen durch eine tiefe Falte getrennt sind, kaum breiter als lang; M 3 ein schmalerer, querovaler Pfeiler. In ihrer Größe und in der Vereinfachung und Verkleinerung des P 2 und der PP 3 ist diese Form am höchsten unter allen Ochotoniden spezialisiert, Prolagus nur in der völligen Rückbildung des unteren M 3 noch mehr. Wie alle anderen ließe sie sich aber wohl von Titanomys aus dem europäischen Mitteltertiär ableiten.

VII. *Rodenia simplicidentata, A. Pedetidae*: *Parapedetes namaquensis n. g. n. sp.* Mehr oder minder vollständige Skelettreste von 1. Pedetes ähnlich, aber von Eichhorngröße und in vielem primitiver. Schädel ebenfalls mit großem, hohem For. infra-

orbitale, und harter Gaumen nur bis Grenze von M 1 und M 2; aber gestreckter und niedriger, ohne Fossae pterygoideae und knöcherne Gehörgänge. Unterkiefer-Symphyse nicht fest, Masseterleiste von P 4 an zu dem weit rück-, aber wenig abwärts ragenden Angulus, der außen am Unterrand entspringt. Gelenk nicht hoch über der Zahnreihe, Kronfortsatz wohl entwickelt, breit.

Nagezähne viel dicker als breit, obere vorn mit mesialer Kante. Vier gleichartige, prismatische Backenzähne, obere nach innen, untere nach außen konvex gekrümmt, alle etwas breiter als lang und mit nur einer mittleren schmalen und sehr tiefen Querfalte von außen bis nahe zum Innenrande. Zahnwechsel spät, Dm mit Wurzeln, sonst wie P 4.

Hals und Brustregion kurz, 7 sehr starke Lendenwirbel, antikline Region weit vorn, Antiklinie sehr ausgeprägt. Drei Sakralwirbel, 2. und 3. mit schwachen Querfortsätzen; Schwanz lang. Humerus klein mit starker dünner Crista deltoidea und supinatoria und For. entepicondyloideum. Unterarm ganz wenig länger; Hand unbekannt. Hinten sehr kräftige Sprungbeine. Becken mit längsovalem For. obturatum; Femur über doppelt so lang als Humerus, mit sehr starken oberen Muskelhöckern, Tibia fast ein Drittel länger als Femur, im Alter mit Fibula verwachsen. Fußwurzel nicht gestreckt, serial. Vier bekrallte Zehen, 3. und 4. fast gleich lang, 2. kürzer, 5. viel schwächer.

Daß diese Form mit dem rezenten Pedetes Südafrikas verwandt ist, läßt sich kaum bezweifeln, sie kann aber, obwohl in Vielem primitiver, wohl nicht der unmittelbare Vorfahre sein, denn dagegen spricht die Kante der oberen Nagezähne, die umgekehrte Lage der Falte der unteren Backenzähne und die mehr paraxone Ausbildung der Hinterfüße. Die Stellung von Pedetes im System der Nagetiere ist nun eine sehr isolierte und bisher strittige. Parapedetes ermöglicht jetzt vielleicht doch eine Anknüpfung an Formen des westeuropäischen Mitteltertiärs, Issiodoromys und Nesokerodon, wenigstens im Bau der Backenzähne. Bei letzterem haben sie mehrere Falten, die dann wohl im Laufe der Entwicklung, wie mehrfach bei Nagetieren anzunehmen ist, rückgebildet wurden. Vor allem hat Nesokerodon oben wie unten eine mittlere Querfalte außen und innen. Man kann nun vermuten, daß oben bei den Pedetiden die innere, bei Issiodoromys

die äußere, unten aber bei Pedetes die äußere, bei Issiodoromys und Parapedetes die innere schwand. So würde sich das bei Nagetieren sehr seltene Verhalten erklären, daß bei Parapedetes oben wie unten die Falte von der gleichen, äußeren Seite eindringt, statt, wie gewöhnlich, oben und unten von der entgegengesetzten Seite. Dieser Auffassung stehen allerdings Bedenken gegenüber, die sich ohne bessere Kenntnis der tertiären Nagetiere Europas nicht beseitigen lassen.

B. *Bathyergidae?*: *Bathyergoides neotertiarius n. g. n. sp.* Ein Mittelstück eines Unterkieferastes mit dem M 2 aus 3, eine Vorderhälfte eines solchen und eine Nagezahnspitze aus 2 gehören nach Form und Größe zusammen zu einem Tiere von geringerer Größe als der rezente Bathyergus maritimus Südafrikas. For. mentale tief unter dem M 1, keine Masseterleiste, aber Grube; Vorderrand des Angulus wulstartig von Kieferaußenseite konvex nach hinten unten und etwas außen ohne Eck. I wenig dicker als breit; vier gleichlange Backenzähne, P 4 schmaler, sonst so breit als lang mit zwei oder drei Wurzeln. M 2 mäßig hoch mit tiefer schmaler Außenfalte und zwei schmalen Innenfalten, davon vordere am Ende umgebogen, hintere kürzer und einfach.

Die Form des Kiefers und des I dieser allzu dürftig bekannten Fossilien spricht zwar für eine Zugehörigkeit zu den Bathyergiden, einen einigermaßen ähnlichen Kronenbau des M fand ich aber nur bei wenigen südamerikanischen Hystricomorphen.

C. *Aulacodidae?*: *Neosciuromys africanus* Stromer (1922, S. 333/4). Ein Unterkieferstückchen mit P 4—M 2 aus 2, ein gleiches aus 3 und ein Oberkiefer mit P 4 und M 1 aus 2 gehören wohl zusammen zu einem über Eichhorngroßen Tiere. Unterkiefer niedrig mit schräger Masseterleiste; Angulus von der Außenseite seines Unterrandes; I bis mindestens M 3. Vier untere Backenzähne (letzter unbekannt) niedrig, etwas länger als breit, nach hinten zu größer werdend, gleichartig W-förmig, d. h. innen zwei tiefe V-förmige Querfalten, außen eine mittlere tiefe breitere, sowie an den MM eine vordere, ganz kleine; P 4 vorn konvex und schmaler. Oben P 4 und M 1 ebenso, nur vorn konvex und außen zwei Querfalten, innen nur eine. Oberes Diastema kurz.

Da ähnliche W-förmige Backenzähne bei Simplicidentata mehrfach vorkommen, besonders bei südamerikanischen Hystrico-

morpha, läßt sich auf Grund des unzureichenden Vergleichsmaterials weder erweisen, ob diese Form mit Sciuromys aus den unteroligocänen Quercy-Phosphoriten Südfrankreichs, dessen Unterkiefer jedenfalls deutliche Unterschiede zeigt, wirklich näher verwandt ist, noch ob beide die Vorläufer des in seiner systematischen Stellung sehr strittigen Thryonomys (Aulacodus) Südafrikas sind. Unwahrscheinlich ist es jedenfalls nicht.

D. *Hystricomorpha?*: *Phiomyoides humilis n. g. n. sp.* Unterkieferast mit P 4 — M 2 und den Alveolen des M 3 aus 3. Kleinster bestimmbarer Nagetierrest von Haselmaus-Größe. For. mentale tief unter P 4, Masseterleiste schwach, keine Massetergrube, Vorderrand des Angulus von Kieferaußenseite sehr wenig konvex und wenig nach unten ohne Eck. I bis mindestens hinter M 3; vier zwei- und dreiwurzelige, niedrige, gleichartige Backenzähne, nach hinten zu größer werdend, mit vier deutlichen Höckern und schwachen W-förmigen Jochen.

Die Zahnzahl und besonders der ganz hystricomorphe Angulus dieser Form schließen ihre Zugehörigkeit zu Sciuroidea oder Myoidea aus und weisen auf Hystricomorpha hin, zu welchen aber wieder der primitive Zahnbau nicht paßt. In letzterem besteht eine ziemlich große Ähnlichkeit mit Sciuroides aus dem europäischen Alttertiär, aber auch mit Ischyromys aus dem nordamerikanischen Oligocän. Werden die Joche der Backenzähne stärker und die Täler enger, so wird aber die Ähnlichkeit mit Phiomys (Osborn non Schlosser) aus dem Oligocän Ägyptens und Paraphiomys aus dem Untermiocän des Victoria-Sees groß. Es liegt eben wohl eine Form vor, die sich zwar an die Hystricomorpha anschließen dürfte, im Zahnbau aber noch sehr primitiv ist und deren Verwandtschaft sich auf Grund des dürftigen Restes nicht feststellen läßt.

E. *Theridomyidae?*: *Aff. Phiomys Andrewsi* Schlosser (non Osborn) Oberkieferstückchen mit M aus 3. Der M gleicht in allem Wesentlichen dem M 1 von Schlossers Original aus dem Unteroligocän Ägyptens, nur ist er ein wenig größer. Es handelt sich also wohl um den Rest einer nahe stehenden Art. Die Zugehörigkeit von Schlossers Art zu der Gattung Phiomys Osborn erscheint mir jedoch nicht sehr wahrscheinlich, wohl aber seine Annahme einer Abstammung von Theridomyidae des europäischen Alttertiärs.

F. *Incertae sedis*: *Diamantomys Luederitzi* Stromer (1922, S. 334) Unterkieferast ohne P 4 und I-Spitze aus 2. Ein wenig größer als bei dem Meerschweinchen. Kiefer sehr gestreckt ohne Masseterleiste und -grube, Angulus ohne Vordereck von Außenwand, anscheinend sehr wenig nach unten ragend. I Querschnitt etwa längsoval, Alveole nicht bis hinter M 3. Vier niedrige, wohl gleichartige Backenzähne. MM nach hinten zu größer werdend, außen in Mitte mit einer sehr tiefen Querfalte, innen mit drei ein wenig nach hinten gerichteten; davon vorderste klein und früh geschlossen, zweite tief und außen gegabelt, dritte mäßig tief und einfach. Außen vorn schräges Cingulum.

In Kiefer- und Backenzahnform nahestehende Formen suchte ich vergeblich. In letzterer hat zwar Theridomys aus dem europäischen Tertiär eine gewisse Ähnlichkeit, aber die Backenzähne nehmen bei ihm nach hinten zu an Größe ab.

Pomonomys dubius Stromer (1922, S. 334/5). Drei Unterkieferäste ohne I-Spitze aus 2. So groß wie bei dem Murmeltier. Kiefer gestreckt mit starker wagrechter Masseterleiste; sein Angulus entspringt außen am Unterrand, ragt kaum nach unten und hat kein Vordereck. I im Querschnitt ungefähr längsoval, Alveole kurz. Vier gleichartige bewurzelte, etwas hochkronige Backenzähne, etwas länger als breit, nach hinten zu ein wenig kleiner werdend, außen in Mitte eine sehr tiefe Querfalte, innen drei, davon erste klein und sehr seicht, mittlere tief und außen gegabelt, hinterste weniger tief und einfach. Vorn außen in Zementhülle Pfeilerchen vom P 4 bis M 2 schwach werdend.

Wie schon früher (a. a. O.) erwähnt, ist zwar der Zahnbau dem bei Diamantomys im Wesentlichen gleich, die Kieferform aber auffallend verschieden und ist die systematische Stellung ebenso unklar wie bei jenem.

Speziell aus 3 liegen noch einige Nagetier-Reste, z. B. Nagezähne, vor, die nicht zu den oben beschriebenen zu rechnen sind, aber keine nähere Bestimmung erlauben.

VIII. *Aves*: Drei Bruchstücke von Vogelknochen aus 3 sind nicht bestimmbar.

IX. *Ophidia*: Zehn in Form und Größe zusammengehörige kleine Schlangenwirbel aus den fossilen Gewöllen von 1 lassen sich bei dem jetzigen Stande des Wissens nicht bestimmen.

X. *Chelonia*: Die weitaus häufigsten Fossilien von 1 und 2 sind Panzerbruchstücke stattlicher Schildkröten. Fast alle sind aber zur Bestimmung zu unvollständig. Sicher ist nur, daß in 2 große *Testudinidae* vertreten sind und in 1 solche vorherrschen und daß in 1 auch eine Riesen-Landschildkröte vorkommt. Als *Testudo namaquensis n. sp.* lassen sich nur Plastra von 1 benennen, die von denen der rezenten Testudinidae Südwestafrikas und den aus dem Oligocän Ägyptens und dem Untermiocän des Victoria-Sees beschriebenen deutlich abweichen. Ihre Mediane ist fast doppelt so lang als die Breite oder die Brückenlänge. Die Epiplastra sind oben stark verdickt, ihr Vorderrand ist ziemlich gerade, der seitliche mit einem Eck versehen. Das Entoplastron ist unten etwas breiter als lang. Die Maximallänge der Hyo- und Hypoplastra ist ungefähr gleich groß, die der Xiphiplastra geringer. Die Gularia sind länger als breit.

XI. *Anura, Aglossa, Xenopodidae*: *Xenopus Stromeri* Ahl n. sp. Von zahlreichen Resten von Anura aus 3 und wenigen aus 2 bestimmte Herr Dr. Ahl in Berlin mit Hilfe des Herrn Direktors Prof. Tornier mehrere Hirnschädelreste aus 3 und wenige aus 2 als zu derselben neuen Art gehörig. Sie unterscheidet sich nach ihnen von dem rezenten Xenopus laevis Südafrikas fast nur in ihrer stattlichen Größe, etwa 17—18 gegen 10 cm Kopfrumpflänge.

Der Schädel ist sehr niedrig, sein Dach abgeflacht, an den Seiten in sanftem Abfall abgedacht. Die Oberseite wird fast nur von den innig verschmolzenen Parietofrontalia gebildet, in deren Mittellinie, wenige mm von vorn ein sehr kleines längsovales Loch vorhanden ist. Die Orbitosphenoidea (Gürtelbein) treten nur als ganz schmaler Streifen vorn an die Oberfläche.

Nach dieser Bestimmung Herrn Dr. Ahls läge hier der erste fossile Aglosse vor und eine Gattung, die heute noch für das äthiopische Reich sehr bezeichnend ist und auch in Deutsch-Südwest-Afrika lebt.

Die Schlüsse, die ich (1922, S. 335—339) aus den wenigen ersten Einzelbestimmungen gezogen habe, werden durch die oben in größerer Zahl angegebenen im Wesentlichen bestätigt. Trotzdem sich aber das zu Grunde liegende Material vervielfacht hat, ist zu betonen, daß fast alle Formen bis auf Parapedetes sehr

unvollkommen überliefert, die meisten Bestimmungen also noch ungenügend gesichert sind, und daß die einstigen Faunen der drei Fundorte infolge der Lückenhaftigkeit der sehr vom Zufall abhängigen Funde gewiß nur zu einem kleinen Bruchteil bekannt sind.

Da schon bei dem jetzigen Stande der Kenntnisse die Fundorte 2 und 3 mehrere Arten gemeinsam haben (cfr. Strogulognathus sansaniensis, Bathyergoides neotertiarius, Neosciuromys africanus und Xenopus Stromeri), erscheint ihre Gleichalterigkeit so ziemlich gesichert, der Fundort 1 wird aber im Alter etwas davon verschieden sein, weil nur eine Säugetiergattung in einer allerdings wenig abweichenden, etwas primitiveren Art (Myohyrax) gemeinsam ist, und ein wenig älter, weil in 2 ein höher spezialisierter Myohyracide (Protypotheroides), und ein Rhinoceride, in ihm aber ein Creodonte (Metapterodon) vorkommt. Mein früherer Schluß, daß es sich bei Fundort 2 ungefähr um Untermiocän handelt, wird nun dadurch erhärtet, daß der gleichalterige Fundort 3 eine Art mit dem Untermiocän des Victoria-Sees gemeinsam hat (Myohyrax Oswaldi). Von Bedeutung ist außerdem, daß außer ihr alle Arten und bei den geologisch kurzlebigen Säugetieren auch alle sicher bestimmbaren Gattungen neu sind, daß aber andererseits, soweit alttertiäre Formen in näheren Vergleich kamen, die vorliegenden eine höhere Spezialisierung aufweisen als unteroligocäne. Es handelt sich also bei 2 und 3 sehr wahrscheinlich um Untermiocän, bei 1 um Oberoligocän oder Grenzschichten von Oligocän und Miocän.

Meine Annahme (1922, S. 335) eines Steppenklimas wird völlig bestätigt, denn nicht nur der Gesamtcharakter der Faunen aller drei Fundorte stimmt damit überein, sondern auch der Nachweis solcher Formen, wie des guten Läufers Metapterodon, von Prohyrax, Bathyergiden und besonders des Springers Parapedetes. Alles spricht dafür, daß hier damals ähnliche Zustände und eine Fauna herrschten, wie heute im Innern des Landes, in Großnamaland oder Hereroland. Damit erklärt sich auch, worauf ich schon (1922, S. 336) hingewiesen habe, daß mit ungefähr gleichalterigen Wirbeltier-Fundorten Afrikas (Victoria-See; Moghara und Uadi Faregh in Nordägypten) fast keine Art gemeinsam ist, weil es sich dort um Faunenreste aus bewaldeten Flußniederungen handelt.

Es kommt aber wohl auch eiu tiergeographischer Grund dazu: Die Mittelmeerländer gehören nämlich jetzt zur paläarktischen Region, weil sie die meisten Säugetierarten mit Europa und Asien gemeinsam haben, das übrige Afrika aber ist eine besondere „äthiopische Region", ausgezeichnet durch das Fehlen vieler für jene Region bezeichnenden Formen und das Vorkommen zahlreicher eigener Gattungen und Arten. Dieses Verhältnis scheint sich nun allmählich im Laufe des jüngeren Alttertiärs und Jungtertiärs herausgebildet zu haben. Denn während des Unteroligocäns hatte die nordägyptische Wirbeltier-Fauna keine einzige Art und nur ganz wenige Gattungen mit den ungefähr gleichalterigen Faunen Europas und Asiens gemeinsam, worauf ich schon vor Jahren hingewiesen habe, zur Untermiocänzeit ist aber schon die Mehrzahl der nordägyptischen Gattungen mit denjenigen jener Gebiete gemeinsam; am Victoria-See jedoch sind die Beziehungen zu den nördlichen Faunen schon erheblich geringer und in Südwest-Afrika nur ganz schwach. Denn außer der geologisch sehr langlebigen Gattung Testudo ist nur der keineswegs gesicherte Palaeochoerus Südwest-Afrikas mit jenen gemeinsam.

Allerdings mußte ich oben mehrfach auf verwandtschaftliche Beziehungen mancher Formen mit geologisch älteren Europas hinweisen. Dabei ist aber zu bedenken, daß ein Vergleich der allermeisten vorliegenden Formen mit älteren Afrikas sich einfach deshalb nicht ermöglichen läßt, weil die alttertiären Wirbeltier-Faunen dieses großen Festlandes nur aus Ägypten und auch da fast nur aus dem Unteroligocän und Obereocän unvollständig bekannt sind.

Daß nun in Südwest-Afrika trotz der so unvollkommenen Kenntnis sich schon eine Anzahl für die äthiopische Region und speziell auch für Süd-Afrika sehr bezeichnender Formen von Wirbeltieren für die Mitteltertiärzeit feststellen läßt, ist von großer Bedeutung, weil so endlich eine gesicherte positive Grundlage für tiergeographische und stammesgeschichtliche Schlüsse in Bezug auf die jetzt an Säugetier-Formen weitaus reichste Region geliefert wird. Formen wie Prohyrax, die Myohyracidae, Parapedetes, Bathyergoides und Xenopus sind ja sicher solche typisch äthiopische Wirbeltiere und von den meisten anderen, die vorliegen, ist dies wenigstens wahrscheinlich.

Daß aber nur solche positive Befunde für Schlüsse in der Wirbeltier-Paläontologie ausschlaggebend sein können, beweist mein sicherer Nachweis eines Ochotoniden in dieser äthiopischen Fauna, denn nach dem bisherigen Stande des Wissens mußte man diese Familie als für die Nordkontinente in der Gegenwart wie in der Vergangenheit sehr bezeichnend ansehen. Daß gerade ihr spezialisiertester Angehöriger im Süden lebte, während eine weniger hochstehende Gattung heute noch im Norden sich erhält, ist eine weitere Überraschung. Denn bisher war die Regel, daß im Norden die spezialisierten Wirbeltier-Formen zuerst auftreten und daß die primitiveren sich im Süden länger erhalten. Metapterodon als einer der im Norden schon vor Schluß des Alttertiärs verschwundenen jüngsten Creodonta fügt sich dagegen ziemlich in die erwähnte Regel. Sein Nachweis in verhältnismäßig jungen Ablagerungen ist aber insofern von Bedeutung, als er, wie übrigens anscheinend auch Funde im Miocän Vorderindiens, mit Sicherheit die Anschauung widerlegt, als seien die Hyaenodontidae nach dem Unteroligocän plötzlich ausgestorben, wozu ihr unvermitteltes Verschwinden aus den bisher fast allein gut durchforschten Gebieten von Europa und Nordamerika verführen mußte.

Auf die Bedeutung des Nachweises eines Rhinoceriden, von Antilopiden und Hystricomorphen-ähnlichen Nagetieren habe ich (1922, S. 335—7) schon hingewiesen. Leider sind diese Formen aber fast alle in zu dürftigen Resten überliefert, als daß sich einigermaßen gesicherte Schlüsse über ihre genaue systematische Stellung und stammesgeschichtliche Bedeutung ziehen ließen. Jedenfalls ist wichtig, daß keine einzige der Nagetier-Formen sich in eine Gattung oder auch nur Familie der Hystricomorpha Südamerikas einreihen läßt; ebenso, daß die Myohyracoidea, von welchen übrigens weder Vorfahren noch Nachkommen bekannt sind, zwar eindringlichst auf die südamerikanischen Typotheria hinweisen, aber, wie wir oben sahen (S. 260/1), nicht mit ihnen in unmittelbare Beziehung gebracht werden dürfen.

Es bleibt demnach auch bei erheblich vollständigerer Kenntnis der mitteltertiären Wirbeltier-Fauna Südwest-Afrikas im Wesentlichen voll bestehen, was ich (1922, S. 338/9) auf Grund der ersten Untersuchung gegen die Annahme eines mitteltertiären Landzusammenhanges zwischen Afrika und Südamerika ausführte.

*

Was ich (a. a. O., S. 337/8) gegen die einer damaligen Landverbindung mit Madagaskar sagte, wird sogar durch die neu beschriebenen Funde bedeutend bestärkt. Südafrika war also, wie jetzt positiv erwiesen ist, schon zur Mitteltertiärzeit der Bestandteil einer eigenen äthiopischen Region. Sie war offenbar von einer erheblichen Zahl eigenartiger Wirbeltier-Formen bevölkert, von welchen wir gewiß bis jetzt nur einen kleinen Bruchteil kennen, der aber doch schon des Wichtigen genug bietet.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft II
Mai- bis Dezembersitzung

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Mai bis Dezember . 5*

Abhandlungen.

L. Döderlein, Anurognathus Ammoni, ein neuer Flugsaurier . 117

H. Liebmann und K. Kommerell, Über Biegungsflächen . . 165

G. Faber, Beweis, daß unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt 169

A. Voss, Über die isotherme Teilung 173

A. Voss, Zur Theorie der Raumkurven 183

F. Lindemann, Die Flächen mit gegebener Form des Linienelementes 195

R. Hertwig, Einfluß der Überreife der Geschlechtszellen auf das Geschlecht von Lymantria dispar. 215

E. Stromer, Ergebnisse der Bearbeitung mitteltertiärer Wirbeltier-Reste aus Deutsch-Südwest-Afrika 253

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1923. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Januar bis März . 1*

Abhandlungen.

F. Lindemann, Die nichteuklidischen Minimalflächen . . 1

O. Frank, Die Leitung des Schalles im Ohr 11

H. Liebmann, Beiträge zur Inversionsgeometrie der Kurven . 79

F. Lindemann, Über konforme Abbildung von Kegelschnittpolygonen 95

A. Föppl, Der Schubmesser. Ein neues Feinmeßgerät für Festigkeitsversuche 109

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Date Loaned
DEC 20 1969

AMNH LIBRARY
100229666